

**BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİĞİNG META-MODELİ VE  
BENZETİM ENİYİLEMESİ**

**MUZAFFER BALABAN**

DOKTORA TEZİ

2018

**KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİGİNG META-MODELİ VE  
BENZETİM ENİYİLEMESİ**

**FRACTIONAL UNIVERSAL KRIGING METAMODEL AND  
SIMULATION OPTIMIZATION**

**MUZAFFER BALABAN**

Başkent Üniversitesi  
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin  
ENDÜSTRİ Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü  
DOKTORA TEZİ  
olarak hazırlanmıştır.

2018

**“KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİGİNG META-MODELİ VE BENZETİM ENİYİLEMESİ”**  
başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından, 11/06/2018 tarihinde, **ENDÜSTRİ**  
**MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI'nda DOKTORA TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Fulya ALTIPARMAK

Üye (Danışman) Prof.Dr. Berna DENGİZ

Üye Prof.Dr. Çiğdem ALABAŞ

Üye Doç. Dr. Ebru ANGÜN

Üye Doç. Dr. Y. Tansel İÇ

**ONAY**

.../07/2018

Prof. Dr. Faruk ELALDI  
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



**BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**DOKTORA TEZ ÇALIŞMASI ORJİNALLİK RAPORU**

Tarih: ... / 06 / 2018

Öğrencinin Adı, Soyadı : Muzaffer BALABAN

Öğrencinin Numarası : 21310127

Anabilim Dalı : Endüstri Mühendisliği

Programı : Doktora

Danışmanın Adı, Soyadı : Berna DENGİZ

Tez Başlığı : Kesirli Ünsersal Kriging Meta-Modeli ve Benzetim Eniyilemesi

Yukarıda başlığı belirtilen Doktora tez çalışmamın; Giriş, Ana Bölümler ve Sonuç Bölümünden oluşan, toplam 143 sayfalık kısmına ilişkin, 20/06/2018 tarihinde şahsım tarafından Turnitin adlı intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan orijinallik raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 7'dir.

Uygulanan filtrelemeler:

1. Kaynakça hariç
2. Alıntılar hariç
3. Beş (5) kelimedenden daha az örtüşme içeren metin kısımları hariç

"Başkent Üniversitesi Enstitüleri Tez Çalışması Orijinallik Raporu Alınması ve Kullanılması Usul ve Esasları"nı inceledim ve bu uygulama esaslarında belirtilen azami benzerlik oranlarına tez çalışmamın herhangi bir intihal içermediğini; aksinin tespit edileceği muhtemel durumda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve yukarıda vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Onay

... / 06 / 2018

Prof.Dr. Berna DENGİZ

## TEŐEKKÜR

Tez çalışmamın sonuca ulaőtırılmasında ve karőtılaőtılan glklerin aőtılmasında yardımcı ve yol gösterici olduğu için tez danıőtmanım Sayın Prof. Dr. Berna DENGİZ'e teőtekkr borç bilirim. Tez izleme komitesinde yer alan ve tez izleme sürecinde yaptıkları değerli katkılar için Sayın Doç. Dr. Ebru ANGN ve Sayın Prof. Dr. Fulya ALTIPARMAK'a teőtekkr ederim.

Eğitim hayatımın tamamında sevgi ve desteğini esirgemeyen annem Ferdiye BALABAN'a ve rahmetli babam Niyazi BALABAN'a da sonsuz teőtekkr ederim.

## ÖZ

### **KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİGING META-MODELİ VE BENZETİM ENİYİLEMESİ**

Muzaffer BALABAN

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Kriging meta-modelleri, özellikle jeolojide enterpolasyon yöntemi olarak geliştirilmiş olmasına karşın 1990'lı yıllardan bu yana belirli benzetim eniyilemesi (BE) problemleri için başarıyla kullanılmıştır. Son zamanlarda ise kriging meta-modellerinin, olasılıklı sistemlerin BE amacıyla bazı çalışmalarda kullanıldığı görülmektedir.

Bu tez çalışmasında “kesirli universal kriging (KÜK) meta-modeli” önerilmiştir. KÜK meta-modeli girdi değişkenleri ile çıktı değişkenleri arasındaki ilişkinin her zaman doğrusal veya karesel drift fonksiyonları ile tanımlanamayabileceği, daha yüksek dereceli drift fonksiyonlarına ihtiyaç duyulabileceği durumlarda kullanılmak üzere ilk kez önerilmiş bir universal kriging (ÜK) meta-modelidir. Bu meta-model esnek yapıya sahip olup diğer kriging meta-modellerine göre daha basit hesaplama ile elde edilebilmektedir. Önerilen KÜK meta-modelinin geçerliliği literatürde mevcut olan karmaşık yapıları iki ve üç değişkenli toplam 12 fonksiyon üzerinde gösterilmiştir. Bu fonksiyonlardan iki değişkenli olanlar sırasıyla Adjiman, Deckkers-Aarts, Altı hörgüçlü deve sırtı, 2 boyutlu Styblinski–Tang, Zettl ve Shubert, üç değişkenli olanlar ise sırasıyla 3 boyutlu Styblinski–Tang, Michaelwicz, Rosenbrock, Schwefel, Isigami ve Perm fonksiyonlarıdır.

Bu tezde yapılan tüm analizlerde ve literatürde var olan kriging meta-modelleri ile yapılan karşılaştırmalarda başarı ölçütü olarak ortalama hata karesi (OHK) ve en büyük hata karesi (EHK) kullanılmıştır. Bu karşılaştırma sonuçlarına göre; OHK ve EHK dikkate alındığında önerilen “KÜK meta-modelinin”, kullanılan fonksiyonların %75'inde ordinary kriging (OK) ve ÜK meta-modellerine göre daha iyi tahmin verdiği, %25'inde ise benzer sonuçlar verdiği gösterilmiştir.

Bu sonuçlara dayanarak, KÜK meta-modellerinin özellikle karmaşık sistemlerin benzetim modelleri yerine meta-model olarak kullanılması bu tezde önerilmiştir.

Ayrıca, bu tez kapsamında önerilen KÜK meta-modeli “bir iletişim ağında rassal gelen mesajların işlem yapma maliyetini en küçükleyecek yönlendirilme olasılıklarının bulunması problemine” uygulanmış ve OK meta-modeline göre daha iyi tahmin elde edildiği gösterilmiştir.

**ANAHTAR SÖZCÜKLER** Benzetim Optimizasyonu, Kriging, Üiversal Kriging, Meta-model, Kesirli Üiversal Kriging

**Danışman** Prof. Dr. Berna DENGİZ, Başkent Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü.

## **ABSTRACT**

### **FRACTIONAL UNIVERSAL KRIGING METAMODEL AND SIMULATION OPTIMIZATION**

Muzaffer BALABAN

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Endüstri Mühendisliği Anabilim Dalı

Although the kriging metamodels have been developed specifically as geological interpolation methods, they have been used successfully for deterministic simulation optimization (SO) problems since 1990s. Recently, kriging metamodels have been used in some studies for SO in stochastic systems.

In this thesis, a fractional universal kriging (FUK) meta-model is proposed to model higher-order drift functions that the relation between input and output variables cannot always be defined by linear or quadratic drift functions meta-model.

Based on modelling analysis and the comparison of results, the proposed "FUK metamodel" gives a better quality estimation than the ordinary kriging (OK) and universal kriging (UK) metamodels according to the mean squared error and maximum squared error for the most of the considered test problems. On the basis of these results, it is proposed to use FUK metamodels instead of simulation models of complex system.

In addition, the proposed FUK metamodel was applied to the message routing problem and produced a better estimate than the OK metamodel.

**KEY WORDS** Simulation Optimization, Kriging, Universal Kriging, Meta-model, Fractionally Universal Kriging

**Supervisor** Prof. Dr. Berna DENGİZ, Başkent University, Department of Industrial Engineering



## İÇİNDEKİLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ.....	i
ABSTRACT .....	iii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ.....	iv
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	vii
ÇİZELGELER LİSTESİ.....	xii
<b>1 GİRİŞ .....</b>	<b>1</b>
<b>2 BENZETİM ENİYİLEMESİ .....</b>	<b>6</b>
2.1 Benzetim Eniyilemesi Probleminin Genel Yapısı .....	8
2.2 Benzetim Eniyilemesi Yöntemlerinin Sınıflandırılması .....	10
2.3 Meta-model .....	13
2.3.1 Meta-modelin Geçerliliği.....	18
2.3.2 Meta-model ile Benzetim Eniyilemesi .....	20
2.4 Benzetimde Kriging Meta-modeli .....	20
2.4.1 Olasılıklı Kesikli Sistemlerde Kriging Uygulamaları .....	23
2.4.2 Kriging Meta-modeli için Deney Tasarımı .....	26
<b>3 KRİĞİNG META-MODELLERİ .....</b>	<b>33</b>
3.1 Kriging için Temel İstatistiksel Kavramlar .....	34
3.1.1 Varyogram .....	34
3.1.2 Kovaryogram .....	36
3.1.3 Korelogram .....	38
3.1.4 Durağanlık .....	39
3.2 Basit Kriging .....	40
3.3 Ordinary Kriging .....	43

	<u>Sayfa</u>
3.4 Üniwersal Kriging .....	49
3.5 Lognormal Kriging.....	56
3.6 Regresyon Kriging.....	57
<b>4 KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİĞİNG META-MODELİ.....</b>	<b>59</b>
4.1 Kovaryans Fonksiyonuna Dayalı Kesirli Üniwersal Kriging .....	62
4.2 Korelogram Fonksiyonuna Dayalı Kesirli Üniwersal Kriging .....	63
<b>5 KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİĞİNG META-MODELİNİN GELİŞTİRİLMESİ....</b>	<b>65</b>
5.1 Adjiman Fonksiyonu .....	65
5.2 Deckkers-Aarts Fonksiyonu.....	71
5.3 Altı Hörgüçlü Deve Sırtı Fonksiyonu .....	77
5.4 Styblinski–Tang fonksiyonu .....	82
5.5 Zettl fonksiyonu.....	88
5.6 Shubert Fonksiyonu.....	93
5.7 Üç Boyutlu Styblinski–Tang Fonksiyonu.....	98
5.8 Michaelwicz Fonksiyonu.....	103
5.9 Rosenbrock Fonksiyonu.....	108
5.10 Schwefel fonksiyonu.....	114
5.11 Ishigami Fonksiyonu.....	119
5.12 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu.....	125
5.13 Kesirli Üniwersal Kriging Meta-modelinin Genel Değerlendirilmesi.....	130
<b>6 UYGULAMA KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİĞİNG META-MODELİ İLE BENZETİM ENİYİLEMESİ.....</b>	<b>134</b>
6.1 Problemin Tanımı.....	134
6.2 Problemin Benzetim Modeli.....	136

	<u>Sayfa</u>
6.3 Meta-model Geliştirme.....	136
6.4 Benzetim Eniyilemesi.....	141
<b>7 SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>142</b>
KAYNAKLAR LİSTESİ.....	145

## ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 1.1 Bir sistem üzerinde çalışma yöntemleri .....	1
Şekil 1.2 Benzetim modeli.....	2
Şekil 2.1 Benzetim eniyilemesi yapısı.....	8
Şekil 2.2 Benzetim eniyilemesi stratejileri.....	9
Şekil 2.3 Genel meta-model yöntemleri.....	16
Şekil 2.4 Meta-modele dayalı genel eniyileme stratejisi.....	17
Şekil 2.5 Olasılıklı kesikli benzetim eniyilemesinde kullanılan kriging meta-model türleri.....	22
Şekil 2.6 Uygun kriging meta-modeli oluşturma akış diyagramı.....	23
Şekil 5.1 Adjiman fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	66
Şekil 5.2 Adjiman fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=9).....	68
Şekil 5.3 Adjiman fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	68
Şekil 5.4 Adjiman fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	69
Şekil 5.5 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK) ....	70
Şekil 5.6 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)....	70
Şekil 5.7 Deckkers-Aarts fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	72
Şekil 5.8 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11).....	73
Şekil 5.9 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	74
Şekil 5.10 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	74
Şekil 5.11 Deckerts Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK) .....	75

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.12 Deckerts Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK).....	76
Şekil 5.13 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	77
Şekil 5.14 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=9).....	79
Şekil 5.15 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	79
Şekil 5.16 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	81
Şekil 5.17 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	81
Şekil 5.18 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK).....	82
Şekil 5.19 Styblinski–Tang fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	83
Şekil 5.20 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=9).....	85
Şekil 5.21 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	85
Şekil 5.22 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	86
Şekil 5.23 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	87
Şekil 5.24 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK).....	87
Şekil 5.25 Zettl fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	88
Şekil 5.26 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11).....	90
Şekil 5.27 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	90
Şekil 5.28 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	91
Şekil 5.29 Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	92

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.30 Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK).....	92
Şekil 5.31 Shubert fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	93
Şekil 5.32 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11).....	95
Şekil 5.33 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	95
Şekil 5.34 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	96
Şekil 5.35 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	97
Şekil 5.36 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)...	97
Şekil 5.37 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv =9).....	100
Şekil 5.38 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21) .....	100
Şekil 5.39 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41) .....	101
Şekil 5.40 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK) .....	102
Şekil 5.41 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK) .....	102
Şekil 5.42 Michaelwicz fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	104
Şekil 5.43 Michaelwicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=8) .....	105
Şekil 5.44 Michaelwicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=20) .....	106
Şekil 5.45 Michaelwicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=40) .....	106
Şekil 5.46 Michaelwicz f fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK) .....	107
Şekil 5.47 Michaelwicz fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK) .....	107

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.48 Rosenbrock fonksiyonununun yüzey gösterimi.....	109
Şekil 5.49 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=8).....	111
Şekil 5.50 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=20) .....	111
Şekil 5.51 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41) .....	112
Şekil 5.52 Rosenbrock fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	113
Şekil 5.53 Rosenbrock fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK) .....	113
Şekil 5.54 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11) .....	116
Şekil 5.55 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21) .....	116
Şekil 5.56 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41) .....	117
Şekil 5.57 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK).....	118
Şekil 5.58 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK) .....	118
Şekil 5.59 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11) .....	121
Şekil 5.60 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21).....	121
Şekil 5.61 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41).....	122
Şekil 5.62 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)...	123
Şekil 5.63 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)...	124
Şekil 5.64 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonunun yüzey gösterimi.....	125
Şekil 5.65 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11) .....	127

	<u>Sayfa</u>
Şekil 5.66 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21) .....	127
Şekil 5.67 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41) .....	128
Şekil 5.68 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK) .....	129
Şekil 5.69 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK) .....	129
Şekil 6.1 Bir iletişim sisteminin gösterimi .....	135
Şekil 6.2 Problemin ARENA programındaki benzetim modeli.....	136
Şekil 6.3 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging modellerinin tahmin değerleri .....	139
Şekil 6.4 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging modellerinin başarımı (OHK) .....	140
Şekil 6.5 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging modellerinin başarımı (EHK) .....	140



## ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 BE yöntemleri (1).....	10
Çizelge 2.2 BE yöntemleri (2).....	11
Çizelge 2.3 BE yöntemleri (3).....	11
Çizelge 2.4 BE yöntemleri (4).....	12
Çizelge 2.5 BE yöntemleri (5).....	12
Çizelge 2.6 BE yöntemleri (6).....	13
Çizelge 2.7 Regresyon meta-modeli için deney sayıları.....	27
Çizelge 2.8 İki girdi değişkenine (faktör) sahip rassal bir LHT matrisi.....	30
Çizelge 2.9 Rassal LHT deney tasarımı için girdi değişkeni değerleri .....	30
Çizelge 2.10 Üç girdi değişkenine sahip rassal bir LHT matrisi.....	31
Çizelge 2.11 Çizelge 2.10 ile verilen deney tasarımı için girdi değişkeni değerleri .....	31
Çizelge 2.12 İki girdi değişkenine (faktör) sahip rassal LHT'nin yüzey gösterimi.....	32
Çizelge 5.1 Adjiman fonksiyonu için LHT sonuçları.....	66
Çizelge 5.2 Kriging meta-modelleri için kullanılan notasyon.....	68
Çizelge 5.3 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modelleri .....	70
Çizelge 5.4 Deckkers-Aarts fonksiyonu için LHT sonuçları.....	72
Çizelge 5.5 Deckerts Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	75
Çizelge 5.6 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için LHT sonuçları.....	77
Çizelge 5.7 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı .....	80
Çizelge 5.8 Styblinski–Tang fonksiyonu için LHT sonuçları.....	83
Çizelge 5.9 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin başarımı....	86
Çizelge 5.10 Zettl fonksiyonu için LHT sonuçları.....	89

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 5.11 Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	91
Çizelge 5.12 Shubert fonksiyonu için LHT sonuçları.....	94
Çizelge 5.13 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	96
Çizelge 5.14 Styblinski–Tang fonksiyonu için LHT sonuçları.....	98
Çizelge 5.15 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	101
Çizelge 5.16 Michaelwicz fonksiyonu için LHT sonuç.....	104
Çizelge 5.17 Michalewicz fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarım.....	107
Çizelge 5.18 Rosenbrock fonksiyonu için LHT sonuçları.....	109
Çizelge 5.19 Rosenbrock fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı..	112
Çizelge 5.20 Schwefel fonksiyonu için LHT sonuçları.....	114
Çizelge 5.21 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	117
Çizelge 5.22 Ishigami fonksiyonu için LHT sonuçları.....	119
Çizelge 5.23 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	122
Çizelge 5.24 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu için LHT sonuçları.....	125
Çizelge 5.25 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı.....	128
Çizelge 5.26 Kesirli universal kriging meta-modelinin diğer kriging modellerine göre tahmin başarımı (1).....	131
Çizelge 5.27 Kesirli universal kriging meta-modelinin diğer kriging modellerine göre tahmin başarımı (2).....	131
Çizelge 5.28 KÜK meta-modeline göre diğer kriging modellerinin OHK'lardaki ortalama sapma oranı (1).....	133
Çizelge 5.29 KÜK meta-modeline göre diğer kriging modellerinin OHK'lardaki ortalama sapma oranı (2).....	133
Çizelge 6.1 Kriging meta-modellerinin kurulmasında kullanacak veriler .....	137
Çizelge 6.2 OK meta-modelinin geçerlilik için tahmin değerleri .....	138

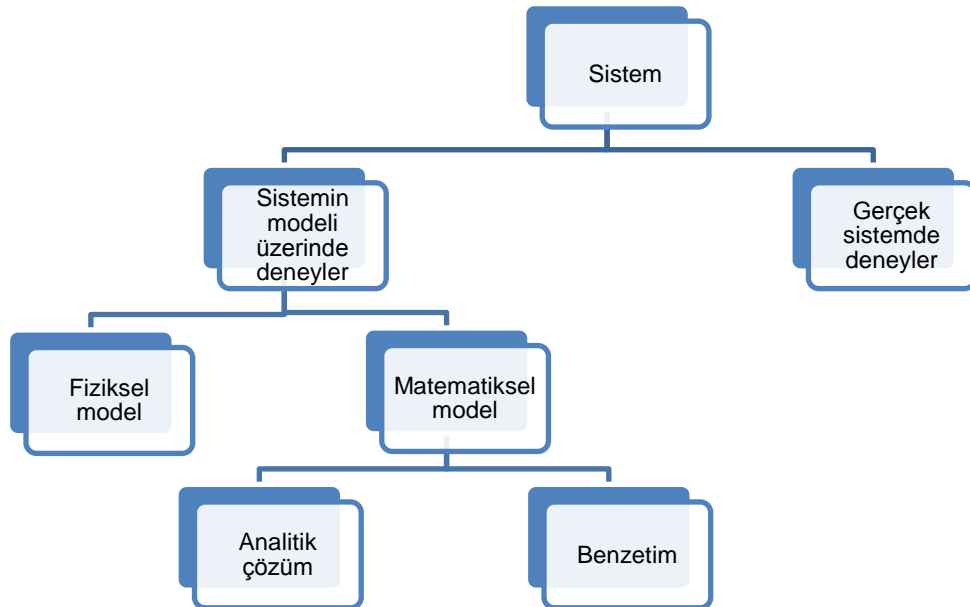
	<u>Sayfa</u>
Çizelge 6.3 Önerilen KÜK meta-modellerinin geçerlilik için tahmin değerleri...	138
Çizelge 6.4 İletişim ağı mesaj rotalama problemi için kriging meta-modellerinin başarımı .....	139

## 1. GİRİŞ

Benzetim kısaca bir sistemin davranışlarının taklit edilmesidir. Bu yöntemle, sistemdeki karar değişkenlerinin yol açabileceği olası sonuçlar yani sistemin çıktı değerleri elde edilir. Kelton [1], benzetimi “gerçek bir sistemin davranışlarını taklit eden modelinin bilgisayar ortamında uygun yazılımlar ile oluşturulması” olarak tanımlar. Benzetimle ilgili günümüze kadar birçok tanımlama yapılmıştır. Ören [2] çalışmasında 100 adet benzetim tanımına yer vermiştir. Benzetimin bir başka tanımı ise “var olan veya yeni tasarlanan bir sistem için mantıksal ve matematiksel modelin uygun yazılımlar kullanılarak kurulması ve bu modelle deneyler yapılması işlemi” olarak yapılmaktadır.

Benzetim modelleri, gerçek sistemin deney yapmaya uygun olmadığı durumlarda, yeni kurulmakta olan sistemin tasarım aşamasında, büyük boyutlu karmaşık sistemlerde, rassallık içeren sistemlerde veya denge durumu dışında sistemlerin geçici durumlarının incelenmesi gerektiğinde sistemin girdileri (karar değişkenleri) ve parametrelere karşı nasıl tepki vereceğinin incelenmesinde kullanılan bir karar verme aracıdır.

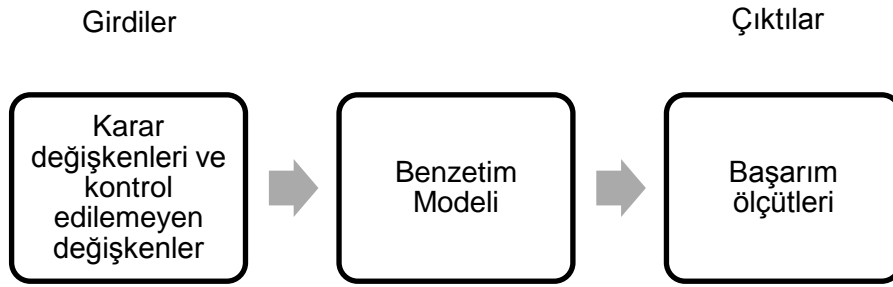
Bir sistem için yapılacak tasarım ve analiz çalışmalarında kullanılabilecek yaklaşımlar Law [3] tarafından Şekil 1.1’deki gibi gösterilmiştir.



Şekil 1.1 Bir sistem üzerinde çalışma yöntemleri

Şekil 1.1'de görüldüğü gibi benzetim, matematiksel bir model türü olup analitik yöntemlerle çözümün bulunamadığı karmaşık sistemlerde, analitik çözümlerin verebildiği başarımlar ölçütleri dışındaki ölçütlerle ilgilenildiğinde, kuyruk modellerinde denge durumu dışındaki herhangi bir geçici durum için çözüm arandığında kullanılır.

Benzetim modeli bir sistemin başarımlar ölçütlerini tahmin etmek veya belirlenen girdi kümesi için davranışını değerlendirmek üzere oluşturulur (Evans et al., [4]). Benzetimin genel yapısı Şekil 1.2'de gösterilmektedir.



Şekil 1.2 Benzetim modeli

Benzetim, karmaşık sistemlerin değerlendirilmesinde çok güçlü bir araçtır. Bu değerlendirmeler genelde sistem/problemlerle ilgili karar değişkenlerinin belirli bir kümesi için başarımlar ölçütlerinin bulunması işlemidir. Diğer yandan, bir cevabın veya cevap vektörünün en küçük veya en büyük değerinin elde edildiği bir sistemin karar değişkenlerinin ne olması gerektiği araştırılabilir (Azadivar, [5]; [6]).

Gerçek hayat problemlerinin çoğu karmaşık olup matematiksel formüller ile çözümü zordur. Uygulamaların çoğunda tamsayı ve karma tamsayı programlama gibi klasik formüllerin en iyi çözümünü bulmak günlerce sürebilir. Gerçek hayatta karşılaşılan problemler doğrusal olmayan karmaşık ilişkiler ve belirsizlikler içerebilir. Bu karmaşıklığın matematiksel programlama yöntemlerinin var olan kısıtları ve amaç fonksiyonu ile modellenmesi mümkün olmayabilir. Bu durumda benzetim çok değerli bir araç haline gelir. Benzetim ile eniyileme yapabilmek için ek bir adıma gereksinim duyulabilir ki bu da benzetim ve eniyilemenin birleştiği bir adımdır. Teorik olarak, karar değişkenleri kümesi için en iyi değerin bulunması işlemi eniyilemenin alanına girer. Son zamanlara kadar en iyi çözümlerin bulunmasını sağlayan yöntemler, benzetimle çözülebilen gerçek hayat problemlerinin içerdiği karmaşıklık ve

belirsizlikle baş edememişlerdir. Olasılıklı (stokastik) eniyileme bu tür uygulama problemlerinin bazılarını çöze de modelleme yapısı bu yöntemlerin bu problem yapılarında çalışmasını sınırlandırmaktadır. Sistemlerdeki karmaşıklık ve belirsizlik bu sistemlerle ilgili karar problemlerinin çözümünde benzetimin kullanılmasının temel nedenidir. Diğer yandan benzetim kullanarak çözülmeye çalışılan bu tür problemlerde eniyileme yöntemlerine olan gereksinim giderek artmaktadır (April et al., [7]).

Benzetim ve eniyileme kavramlarının birlikte kullanılması son yıllarda hızla artmaktadır. Eniyileme, mühendislik başta olmak üzere diğer birçok alanda var olan karmaşık yapılarıdaki sistemlerle ve süreçlerle ilgili problemlerin incelenmesinde ve çözümünde kullanılan yöntemleri kökleşmiş matematiksel bir kavramdır. Winston [8] eniyilemeyi kısaca, verilen kısıtları sağlayan, karar değişkenlerinin tüm değerleri içinden bir amaç fonksiyonunu eniyileyen (enküçükleyen veya enbüyükleyen) karar değişkenleri değerlerinin bulunması olarak tanımlamıştır.

Bir meta-model, “modelin modeli” olarak tanımlanır. Meta-modellere, duyarlılık analizi, girdilerin değişimine karşı çıktılardaki değişimlerin gözlenmesi ve eniyileme gibi birçok amaç için ihtiyaç duyulur (Kleijnen, [9]). Meta-modelin benzetim alanında farklı kullanım yerleri vardır. Basit yapıdaki meta-modeller daha karmaşık benzetim modellerinin genel davranış karakteristiğini açıklamak için kullanılırlar (Barton, [10]). Literatürde benzetim modelleri için en yaygın meta-model oluşturma yöntemi olarak birinci ve ikinci dereceden regresyon modelleri kullanılmıştır [11; 12; 13].

Benzetim eniyilemesi (BE), benzetim ve eniyileme yöntemlerinin birlikte değerlendirilmesi ile oluşmuştur. BE'nin bu kadar önemli olmasının temel nedenlerinden biri problemlerdeki belirsizliklerin, rassal bileşenlerin, karmaşık ve doğrusal olmayan ilişkilerin matematiksel eniyileme yöntemlerinin uygulanmasını olanaksız hale getirebilmesidir.

1990'lı yılların sonlarına kadar benzetim ve eniyileme ayrı tutulmuştur. Literatürde bunları birleştirmeye yönelik çalışmalar yok denecek kadar azdır. Bununla beraber 1990 sonrasında çalışmalar belirgin bir şekilde artmıştır (Fu, [14]).

Fu [15] BE'nin kapsamlı genel bir özetini yayınlamıştır. Carson and Maria [16] BE'nin genel bir özetini sunmuştur. Androdottir [17] BE tekniklerini gradyan tahmin teknikleri (sürekli girdi parametreleri için) ve rassal arama yöntemleri (kesikli girdi parametreleri

için) bakımından inceleyen bir makale sunmuştur. Azadivar [6] BE ile ilgili konuları içeren bir çalışma yapmıştır.

Barton [10]; [18]; [19] çalışmalarında BE tekniklerinden meta-model yöntemlerini detaylı olarak incelemiştir.

Sacks et all., [20] ilk kez coğrafi istatistiklerin incelenmesinde kullanılan kriging enterpolasyon yöntemini belirli (deterministik) benzetim modellerinin meta-modelini oluşturmak için kullanmıştır. Olasılıklı benzetim modellerine eniyileme amacıyla kriging yöntemi ilk kez Van Beers and Kleijnen [21] tarafından meta-model kullanılarak uygulanmıştır.

**Bu tezde, benzetim modeli ile veri üretmenin maliyetli olabileceği durumlarda benzetim modelinin yerine kullanılabilecek “Kesirli Üiversal Kriging (KÜK) modeli” meta-model olarak ilk kez önerilmektedir.**

Girdi değişkenleri ile çıktı değişkenleri arasındaki ilişki her zaman doğrusal veya karesel drift fonksiyonları ile açıklanamamaktadır. Bu durumda daha yüksek dereceli drift fonksiyonlarına gereksinim duyulmaktadır. Bu nedenle, bu tezde, temsil yeteneği yüksek meta-modeller elde edebilmek için KÜK modeli önerilmiş ve bu gereksinimin karşılanması amaçlanmıştır. Önerilen KÜK meta-modellerinin geçerliliği, iki ve üç boyutlu (girdi değişkenli) Adjiman, Deckkers-Aarts, Altı hörgüçlü deve sırtı, 2 boyutlu Styblinski–Tang, Zettl, Shubert, 3 boyutlu Styblinski–Tang, Michaelwicz, Rosenbrock, Schwefel, Isigami ve Perm test fonksiyonları (TF) üzerinde denenerek doğrusal ve karesel drift fonksiyonlu Üiversal Kriging meta-modelleri ile karşılaştırılmıştır. Karşılaştırmada başarımlar ölçütü olarak ortalama hata kare (OHK) ve en büyük hata kare (EHK) dikkate alınmıştır.

**Bu tezde önerilen ve geçerliliği zor fonksiyonlar için gösterilen KÜK meta-modeli benzetim eniyilemesinde uygulanmak üzere “bir iletişim ağında yönlendirme” probleminde kullanılmıştır. Karşılaştırma sonuçlarına göre; “KÜK meta-modeli”nin, tüm test problemlerinde, OHK ve EHK bakımından Ordinary Kriging (OK) ve Üiversal Kriging (ÜK) modellerine göre daha kaliteli tahmin verdiği görülmektedir. Böylece, benzetim modelinin girdi-çıkıtı ilişkisinin karesel polinomial yapıdan daha yüksek dereceli bir fonksiyon ile açıklanabilir olması durumunda, KÜK meta-modellerinin BE’de, kullanılabileceği gösterilmiştir.**

Bu çalışmada, her ne kadar önerilen KÜK meta-modelinin geçerliliği, iki ve üç boyutlu (girdi değişkenli) TF üzerinde matematiksel ve istatistiksel incelemeler ile araştırılmış ise de üçten fazla boyutlu problemlerde de kullanılabilirliği üzerinde bir kısıtlama bulunmamaktadır.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde BE ile ilgili tanım ve kavramlar, BE probleminin genel yapısı, BE yöntemlerinin sınıflandırılması, BE yöntemlerinde meta-modeller, BE ve kriging meta-modeli ilişkisi, meta-modelin uygunluğunun belirlenmesinde kullanılan yöntemler ile meta-modelin BE'de kullanılması ve sonuçların benzetim modelinde doğrulanması çalışmaları anlatılmıştır. Ayrıca bu bölümde, kriging modellerinin elde edilmesinde kullanılan Latin hiperküp tasarım (LHT) yöntemi anlatılmıştır.

Bu çalışmanın üçüncü bölümünde, varyogram, kovaryogram ve korelogram analizleri anlatılarak basit kriging, OK, ÜK, Lognormal Kriging (LK) ve regresyon kriging meta-modellerinin oluşturulma yöntemleri açıklanmıştır.

Dördüncü bölümde, önerilen KÜK meta-modeli detaylı olarak incelenmiştir.

Beşinci bölümde uygulamalara yer verilmiş, üçüncü ve dördüncü bölümlerde anlatılan kriging meta-modelleri TF'ye uygulanmış, uygun kriging meta-modelin seçilmesi aşamaları adım adım verilmiş ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

Altıncı bölümde ise, KÜK meta-modelleri bir iletişim ağında rassal gelen mesajların işlem görme maliyetini en küçükleyecek yönlendirilme oranlarının bulunması problemine uygulanmıştır.

Yedinci bölüm sonuçlar bölümü olup, yapılan tez çalışmasının genel değerlendirmesi yapılmıştır.



## 2. BENZETİM ENİYİLEMESİ

Bir süreç veya sistem üzerinde deneyler yapmak veya davranışlarını gözlemlemek için benzetim modeli kurulduktan sonra modelin çıktıları veren amaç fonksiyonlarına göre karar değişkenlerinin (girdiler) en iyi değerlerinin bulunması istenebilir. Bazı sistemler için karar değişkenlerinin en uygun değerleri (girdiler), karar değişkenlerinin mümkün tüm kombinasyonları deneyerek bulunabilir. Ancak bazı karmaşık sistemler için karar değişkenlerinin olası tüm kombinasyonları için benzetim modelinin çalıştırılması mümkün olmayabilir. Bu durumda karar değişkenlerinin en iyi değerlerini bulmak için bir eniyileme yönteminin kullanılmasına gerek duyulur.

Glynn [22] karmaşık olasılıklı sistemlerin BE'si için algoritma geliştirme konusunda dikkate değer bir artış olduğunu rapor etmiştir.

Olasılıklı bir sistemin başarısı karar değişkenlerinin seçilen değerlerine bağlıdır ve karmaşık sistemlerde sistem başarısını tahmin etmek için her karar değişkenleri kümesinin benzetim modelinde çalıştırılması gereklidir (Andradottir, [17]).

Uzun zamandan beri yöneylem araştırması alanında eniyileme, matematiksel programlama ile eşanlımlı olmuştur. Hesaplama verimliliği alanındaki hızlı gelişmeler sayesinde, eniyileme paketleri için geliştirilen programlar binlerce değişkenli modelleri çözmek için kullanılabilir. Öte yandan hesaplamalardaki bu gelişmelere rağmen karmaşık ve olasılıklı sistemler için benzetim kullanılmasını gerektiren durumlarda BE alanına olan ilgi sürekli artan çabalara yol açmıştır (Fu, [15]).

Matematiksel programlama gibi geleneksel eniyileme yöntemlerinin çoğu bazı problemlerin çözümünde oldukça etkilidir. Ancak karmaşık olasılıklı modellerin çok büyük bir kısmı için ise uygun değildir. Bu tür modeller için çoğunlukla tek uygun yol benzetimdir. Benzetim kullanarak olasılıklı kesikli olaylı sistemlerin eniyilemesi için etkili bir yöntem geliştirmek çok kolay değildir ancak uygulama için oldukça önemlidir (L' Ecuyer et al., [23]).

BE yeni bir sistemin tasarımı ve var olan bir sistemin davranışının değerlendirilmesi için girdi(ler) ve çıktı(lar) arasındaki ilişkinin analitik fonksiyonları bilinmediği zaman uygun model elde etmemizi sağlayan sistematik bir tekniktir. Bir benzetim modelinin

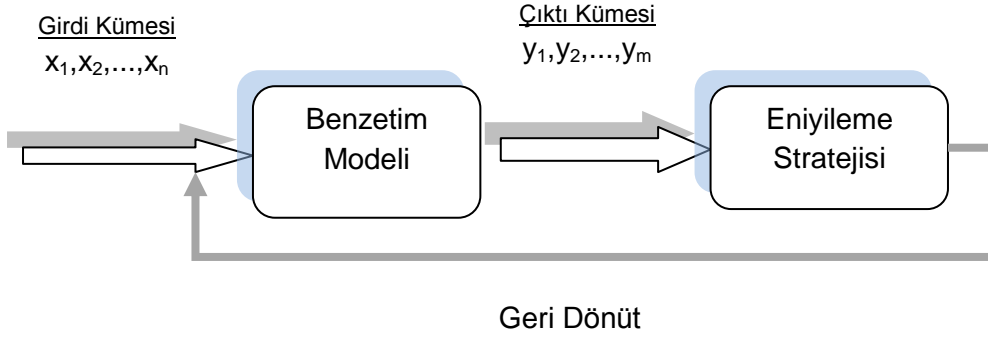
sayısal karar değişkenlerinin eniyilemesini hedefleyen BE süreçleri üzerine son yıllarda yoğun çaba harcanmaktadır (Azadivar, [5]).

BE Carson and Maria [16] tarafından girdi değişkenlerinin tüm olası değerlerinin açıkça değerlendirilemediği durumlarda, tüm olası değerler içinden, en iyi girdi değişkenlerinin değerlerinin bulunması süreci olarak tanımlanmıştır. BE'nin amacı, benzetim deneylerinden elde edilen bilgiler ile kaynak kullanımını en küçükleme olarak ifade edilmiştir.

Swisher et all., [24]'e göre ise BE, bir benzetim modeli ile elde edilen çıktının denge veya geçiş durumu fonksiyonu ile ölçülebilen en iyi çözümlü veren girdi değişkenlerinin bir setinin bulunmasını sağlayan bir yaklaşımdır.

BE, Fu [25] tarafından, olasılıklı benzetim modelinden elde edilen çıktılardan oluşan başarımlar ölçülerinin eniyilemesi olarak tanımlanmıştır. BE olasılıklı kesikli-olay benzetim modellerinin çıktılarına odaklanmıştır. Benzetim modelinin kendisi eniyilemede kullanılacak olursa, eniyileme için benzetimden verilerin üretilmesi oldukça pahalı olacaktır. Diğer bir deyişle bir benzetim modelinin tek bir kez çalıştırılması (replication) için gereken hesaplama zamanı bile orta ölçekli (binlerce değişkeni olan) doğrusal programın hesaplama süresini aşmaktadır.

Son yıllarda bilgisayarların hesaplama gücü ve bellek kapasitesindeki gelişmeler benzetim modellerinin eniyileme olasılığını oldukça artırmıştır. Bu gelişme, benzetimde en heyecan verici fırsatlardan birini sunmaktadır ve bu alanda çok fazla sayıda araştırma yapılmıştır (Fu et all., [26]).



Şekil 2.1 Benzetim eniyilemesi yapısı

## 2.1. Benzetim Eniyilemesi Probleminin Genel Yapısı

BE probleminde, genelde, eniyileme problemlerinde olduğu gibi girdi ve çıktı değişkenleri, amaç fonksiyonu ve kısıtlardan oluşan problem yapısı vardır. Amaç fonksiyonu ve kısıtlar girdi ve çıktı değişkenlerinden oluşur. Her ikisi birden veya biri olasılıklı bileşen içerebilir. Çıktı değişkenleri benzetim modelinin başarımlar ölçütleri olduğundan yapısı gereği sayısal değerlerdir. Öte yandan standart matematiksel programların aksine BE problemlerinde girdi değişkenleri sayısal veya sayısal olmayan değerler olabilir. BE problemlerinde genelde tek amaç fonksiyonu vardır. Birden fazla amaç fonksiyonu olduğunda çoğunlukla uygun ağırlıklar kullanarak tek bir amaç fonksiyonu elde edilerek veya biri hariç diğerleri kısıt olarak değerlendirilerek çözülür (Fu, [25]).

BE'nin geleneksel eniyilemeden farkı, amaç fonksiyonunun değerlendirilmesinin hesaplama maliyetinin yüksek olmasıdır. Dolayısıyla BE'de aday çözümlerin üretilmesi ve bunların amaç fonksiyonu değerlerinin tahmininden oluşan iki önemli kısım vardır. BE'nin maliyetini artıran (zorlaştıran) en önemli şey karmaşık benzetim modellerinin olasılıklı yapısından kaynaklanan pahalı çözümlerdir (Fu, [25]).

Bir enküçükleme probleminin genel yapısı aşağıda (2.1) numara ile verilen parametrik eniyileme problemi şeklinde ifade edilebilir.

$$\text{enk}_{x \in S}(J(x)) \quad (2.1)$$

Burada  $J(\mathbf{x}) = E[L(\mathbf{x}, \omega)]$  ilgilenilen başarıml ölçütünün beklenen değerini,  $L(\mathbf{x}, \omega)$  ölçütün örnek değerini,  $\omega$  sistemdeki olasılıklı etkiyi,  $\mathbf{x}$  ise  $S$  çözüm kümesinde tanımlı  $n$  adet kontrol edilebilir girdi değişkeni vektörünü ifade eder.

Enküçükleme problemi için en iyi çözüm ise (2.2) numaralı eşitlikte verildiği gibi gösterilir (Fu, [15]).

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argmin}_{\mathbf{x} \in S} (J(\mathbf{x})) \quad (2.2)$$

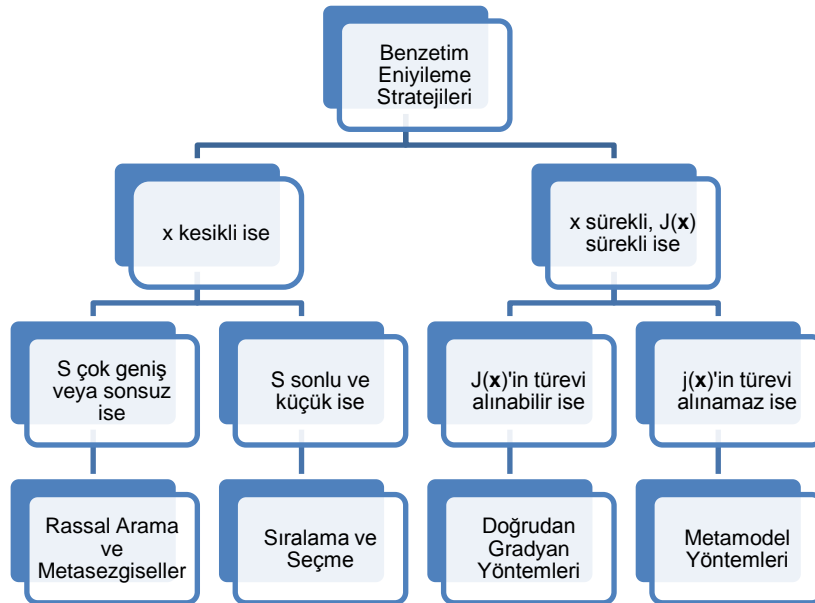
Benzer şekilde bir enbüyükleme probleminin genel yapısı ise aşağıda (2.1) numara ile verildiği gibidir.

$$\operatorname{enb}_{\mathbf{x} \in S} (J(\mathbf{x})) \quad (2.3)$$

Enbüyükleme problemi için en iyi çözüm ise (2.4) numaralı eşitlikte verildiği gibi gösterilir.

$$\mathbf{x}^* = \operatorname{argenb}_{\mathbf{x} \in S} (J(\mathbf{x})) \quad (2.4)$$

BE stratejileri karar değişkenlerinin (girdi)  $\mathbf{x}$ , amaç fonksiyonunun (başarım ölçütü)  $J(\mathbf{x})$  ve çözüm kümesinin  $S$  yapısına bağlıdır (Barton and Meckesheimer, [27]). Şekil 2.1, bu bağlamda bir benzetim modeli ile BE arasındaki ilişkiyi, Şekil 2.2 ise BE stratejilerini şematik olarak göstermektedir.



Şekil 2.2 Benzetim eniyilemesi stratejileri

## 2.2. Benzetim Eniyileme Yöntemlerinin Sınıflandırılması

Bu tez çalışmasında daha önce de ifade edildiği gibi olasılıklı BE’de kullanılan meta-modele dayalı yöntemler başlığı altında değerlendirilen kriging yöntemleri ile ilgilenilmektedir. Meta-model kavramı ve kriging yöntemlerini detaylı olarak incelemeden önce literatürde yer alan BE ile ilgili temel sınıflamalar hakkında bilgi vermek faydalı olacaktır. Literatürde BE veya benzetim için eniyileme başlıkları altında genel değerlendirme çalışmaları yapılmıştır.

Carson and Maria [16], Azadivar [5]; [6], Fu [14], Fu et all. [26] ve Barton, [10]; [18]; [19] tarafından yapılan genel değerlendirme çalışmaları BE konusunda temel referans kaynağı olmuştur. Carson and Maria [16] BE için kullanılan yöntemleri Çizelge 2.1’de verildiği gibi sınıflandırmıştır.

Çizelge 2.1 BE yöntemleri (1)

Yöntem Sınıfı	Yöntem Adı
Gradyana Dayalı Arama Algoritmaları	Sonlu Farklar (türevler)
	Olabilirlik Oranı
	Pertürbasyon Analizi
	Frekans Bölgesi Yöntemleri
Olasılıklı Eniyileme	
Cevap Yüzeyi Yöntemleri	
Sezgisel Yöntemler	Genetik Algoritmalar
	Evrin Stratejileri
	Tavlama Benzetimi
	Tabu Arama
	Nelder ve Mead Simpleks Arama
A-Takımları	
İstatistiksel Yöntemler	Önemli Örnekleme Yöntemleri
	Sıralama ve Seçme
	En iyi ile Çoklu Karşılaştırmalar

Carson and Maria [16] çalışmalarında, cevap yüzeyi yöntemlerini (CYY), bir benzetim modelinin çıktılarına birçok regresyon modellerinden uygun olanı seçerek en iyi girdi değişken değerlerinin bulunması olarak tanımlamışlardır. Çalışmalarında BE için kullanılan yöntemler arasında kriging yöntemi ve diğer meta-model türlerinden bahsedilmemiştir.

Azadivar [5]; [6], BE için kullanılan yöntemler ile ilgili araştırmalarında Çizelge 2.2 ile verilen yöntemlere yer vermiştir.

Çizelge 2.2 BE yöntemleri (2)

Yöntem Sınıfı	Yöntem Adı
Gradyana Dayalı Arama Algoritmaları	Sonlu Farklar (türevler) Tahmini
	Pertürbasyon Analizi
	Frekans Bölgesi Analizi
	Olabilirlik Oranı Tahmin edicisi
Olasılıklı Yaklaşım Yöntemi	
Cevap Yüzeyi Yöntemi	
Örnek Yol Optimizasyonu	
Sezgisel Yöntemler	Karmaşık Arama
	Tavlama Benzetimi

Azadivar [5];[6] her iki çalışmasında CYY'yi benzer şekilde tanımlamış ve BE için kullanılan yöntemler arasında kriging yöntemi ve diğer meta-model türlerinden bahsetmemiştir. Fu et al., [26] çalışmalarında Çizelge 2.3 ile verilen yöntemlerin BE'de kullanıldığını belirtmişlerdir.

Çizelge 2.3 BE yöntemleri (3)

<b>Yöntem Sınıfı</b>
Sıralama ve Seçme
Cevap Yüzeyi Yöntemi
Gradyana Dayalı Süreçler
Rassal Arama
Örnek Yol Optimizasyonu
Sezgisel Yöntemler (Tabu Arama ve Serpme Arama)
Modele Dayalı Yöntemler (potansiyel çözümlerde olasılık dağılımlarının kullanılması)

Fu et al. [26] CYY'yi, girdi değişkenleri ve çıktı (amaç fonksiyonları) arasındaki fonksiyonel ilişkiyi yaklaşık olarak elde etmek olarak tanımlamış ve en genel iki yöntemin regresyon ve yapay sinir ağları olduğunu belirtmiştir. Ayrıca son zamanlarda krigingin de önerildiğini ifade etmiştir.

Barton [19] çalışmasında Çizelge 2.4'deki yöntemlerin BE'de kullanıldığını belirtmişlerdir.

Çizelge 2.4 BE yöntemleri (4)

<b>Yöntem Sınıfı</b>
Sıralama ve Seçme
Meta-model Yöntemleri
Gradyana Dayalı Süreçler
Rassal Arama
Örnek Yol Optimizasyonu
Sezgisel Yöntemler
Modele Dayalı Yöntemler

Bu çalışmada konumsal korelasyon (kriging) yönteminin de meta-model yöntemlerinden biri olduğu ifade edilmiştir. Ancak Barton [10]; [18] benzetim meta-modeli çalışmalarında konumsal korelasyon yönteminden özetle bahsetmiştir. Meta-modele dayalı BE yöntemleri ayrı bir başlık altında değerlendirilecektir. Angun and Kleijnen [28] tarafından BE için kullanılan yöntemler, “Beyaz Kutu” ve “Kara Kutu” temel başlıkları altında Çizelge 2.5’de gösterildiği gibi sınıflandırılmıştır.

Çizelge 2.5 BE yöntemleri (5)

Yöntem Ana Grubu	Yöntem Sınıfı	Yöntem Adı
Beyaz Kutu Yöntemleri	Rassal Arama	Tavlama Benzetimi Algoritması
		Olasılıklı Cetvel Yöntemi
	Gradyana Dayalı Arama Algoritmaları	Sonlu Farklar (türevler)
		Olabilirlik Oranı
		Pertürbasyon Analizi
		Frekans Bölgesi Yöntemleri
	Olasılıklı Eniyileme	Olasılıklı Yaklaşım Yöntemi
Örnek Yol Eniyilemesi		
Kara Kutu Yöntemleri	A-Takımları	Newton Yöntemi
		Levenberg-Marquard Algoritması
	İstatistiksel Yöntemler	Önemli Örnekleme Yöntemleri
		Sıralama ve Seçme
		Çoklu Karşılaştırmalar
	Cevap Yüzeyi Yöntemleri	
	Sezgisel Yöntemler	Genetik Algoritmalar
		Evrin Stratejileri
		Tavlama Benzetimi
		Tabu Arama
		Nelder - Mead Simpleks Arama
Parçacık Sürüsü Optimizasyonu		
Yayılim Arama		

Çizelge 2.6 BE yöntemleri (6)

Parametre Yapısı	Yöntem Sınıfı	Yöntem Adı
Sonsuz Parametre Uzayı / Sürekli Girdi Parametresi	Meta-modele Dayalı Yöntemler	Cevap Yüzeyi Yöntemleri
		Kriging
		Yapay Sinir Ağları
	Gradyana Dayalı Arama Algoritmaları	Sonlu Farklar (türevler)
		Olabilirlik Oranı
		Pertürbasyon Analizi
		Frekans Bölgesi Analizi
	Meta-sezgisellere Dayalı Yöntemler	Genetik Algoritmalar
		Tavlama Benzetimi
		Tabu Arama
		Evrin Stratejileri
	Sonlu Parametre Uzayı / Kesikli Girdi Parametresi	İstatistiksel Yöntemler
Sıralama ve Seçme		
Çoklu Karşılaştırmalar		

Zakerifar et al. [29] tarafından yapılan BE sınıflandırması çalışmasında meta-modele dayalı yöntemler başlığı altında Çizelge 2.6'da görüldüğü gibi kriging yöntemi yer almaktadır.

### 2.3. Meta-model

Önerilen veya var olan sistemlerin karmaşık benzetim modelleri genellikle sistem tasarımındaki değişimlere karar vermek için kullanılır. Maliyeti veya diğer kısıtlamalar nedeniyle gerçek sistem üzerinde deneyler yapılamayacağından veya gerçek sistemin çoklu prototiplerinin yapılamaması nedeniyle araştırmacılar gerçeğinin yerine benzetim modeli kullanırlar. Bu benzetim modelleri oldukça karmaşık olabilir ve bu modellerin daha basit yaklaşımlarla özet modeli oluşturulur (Barton, [10]; [18]; [19]).

Bir meta-model, modelin modeli olarak tanımlanır. Bu tür yardımcı modeller karmaşık sistemlerin benzetim modelleri yerine kullanılır. Meta-modeller ile farklı durumların (farklı parametre değerleri, farklı değişken değerleri, farklı yapısal ilişkiler) kombinasyonu kullanılarak sistem davranışı hakkında daha çok bilgiye sahip olunur. Bu bilgilere; duyarlılık analizi, girdilerin değişimine karşı çıktılarının değişiminin gözlenmesi ve eniyileme gibi birçok amaç için ihtiyaç duyulur (Kleijnen, [9]).



Meta-model kullanmaksızın bu incelemeler, deneme yanılma ile benzetim modelinin birçok farklı senaryo için çalıştırılması yoluyla gerçekleştirilebilir (Kleijnen, [9]).

Meta-model kavramının kekeni Kleijnen [9] olsa da benzetim topluluğu meta-model kavramını 1970'lerden beri kullanmaktadır (Barton, [10]; [18]; [19]).

Meta-modelin benzetim alanında farklı kullanım yerleri vardır. Basit yapıdaki meta-modeller daha karmaşık benzetim modellerinin genel davranış karakteristiğini açıklamak için kullanılırlar. Basit yapıdaki meta-modelden elde edilen bilgiler karmaşık ana modelin doğrulanması ve onaylanmasında da kullanılabilir. Ayrıca sistem performansını en çok etkileyen sistem parametrelerinin belirlenmesinde de kullanılabilir. Bir meta-model, çok amaçlı sistemlerin tasarım veya eniyilemesi için "what if" (girdiler değiştiğinde çıktılar ne olur) incelenmesi amacıyla daha az bilgisayar kaynağı (bellek, zaman gibi) tükettiğinden tekrar tekrar çalıştırılabilir.

Bir benzetim modelinin girdi-çıktı ilişkisinin fonksiyonu matematiksel olarak  $y=g(\mathbf{x})$  eşitliği ile gösterilir. Burada  $y$  ve  $x$  vektörleri rassal bileşenler içerebilir. Böylece,  $y = g(\mathbf{x}) + e$  şeklinde ifade edilir. Modelde ki  $y$  benzetim modelinin çıktı değerlerini,  $x$  ise girdilerin değerlerini ifade eder. Meta-modelin amacı  $g$ 'nin ve  $e$ 'nin uygun modelini bulmaktır (Barton, [10]; [18]; [19]).

Genellikle meta-model  $y = g(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{x})$  olarak ifade edilir. Bir meta-modelin oluşturulmasının temel adımları;

- i. Meta-modelin ( $f(\mathbf{x})$  fonksiyonunun) genel yapısının belirlenmesi,
- ii. Meta-modele uygun deney tasarımının seçilmesi,
- iii. Seçilen deney tasarımı uyarınca benzetim deneylerinin yapılması,
- iv. Meta-modelin elde edilmesi,
- v. Meta-modelin geçerliliğinin (uyuluğunun) değerlendirilmesi

olarak belirlenebilir (Barton, [10]; [18]; [19]).

Meta-model ile eniyileme stratejisinde ise;

- vi. Meta-model ile en iyi girdi kümesinin bulunması,
- vii. Meta-modelden elde edilen en iyi girdi kümesi için benzetim modeli ile sistem başarımının test edilmesi

adımları gerçekleştirilir [27;19].

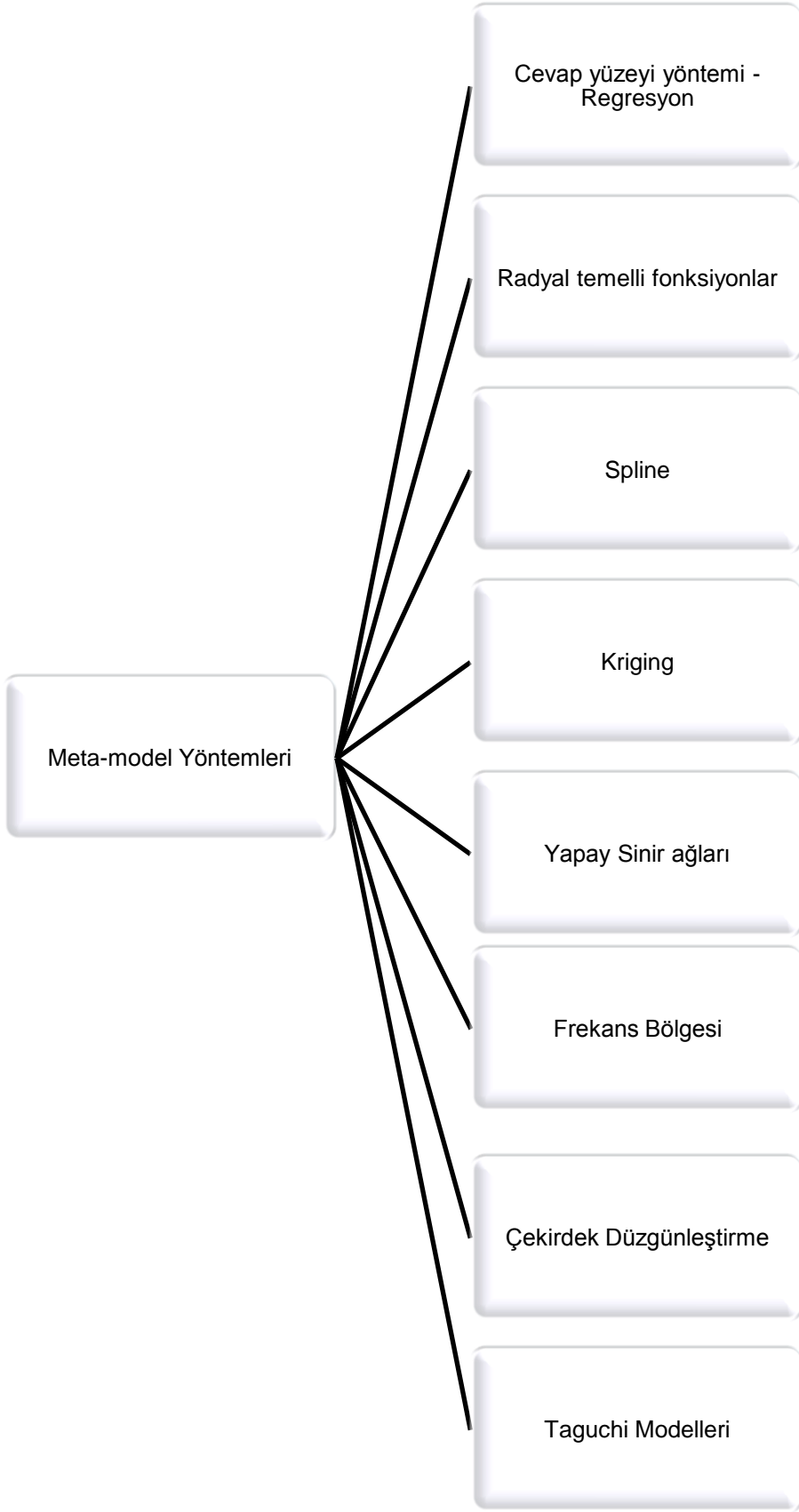
Meta-model elde etmek için birçok yöntem vardır. Hangi yöntemin kullanılacağı problemin yapısına, literatürdeki çalışmalara, deneyimlerine dayanarak araştırmacı tarafından verilmesi gereken bir karardır.

$f(\mathbf{x})$  fonksiyonunun oluşturulmasında en çok kullanılan teknik polinomial CYY'dir (Barton, [10]; [18]; [19]). Literatürde en yaygın birinci ve ikinci dereceden regresyon modelleri kullanılmıştır [11;12;13]. CYY genellikle ikinci dereceden regresyon modellerini kullandığından dolayı benzetim çıktılarının doğrusal olmayan yapısını modellemede sınırlı kapasiteye sahiptir (Simpson et al., [11]).

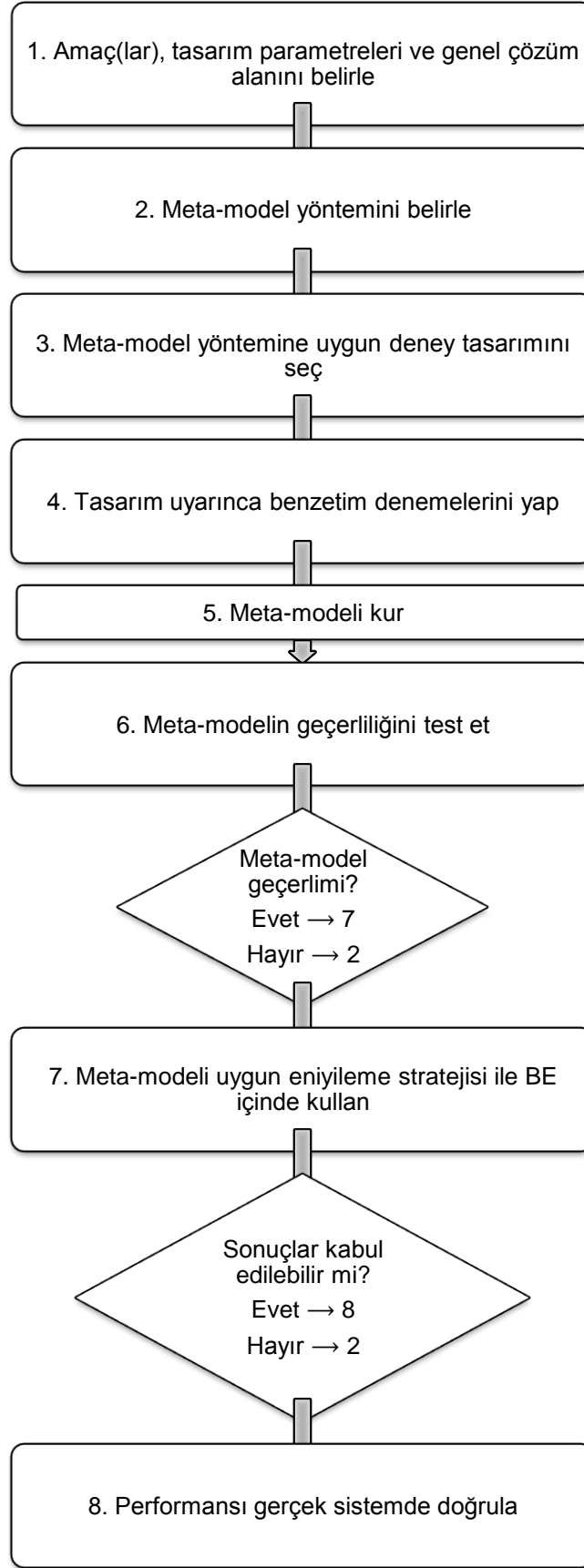
BE'de kullanılan meta-model yöntemleri Barton [10]; [18]; [19], Barton and Meckesheimer [27]'den da faydalanılarak aşağıda Şekil 2.3 içinde özetlenmiştir.

Bu tezin ana konusu kriging yöntemi kullanarak yeni bir meta-model yaklaşımı geliştirmek olduğundan bu çalışmada diğer meta-model yöntemleri hakkında ayrıntıya girilmemiştir.

Meta-modele dayalı genel eniyileme stratejisi adımları Şekil 2.4'de gösterilmektedir.



Şekil 2.3 Genel meta-model yöntemleri



Şekil 2.4 Meta-modele dayalı genel eniyileme stratejisi

Barton [19]'dan yararlanılarak meta-modele dayalı genel eniyileme stratejisi şekil 2.4'de görüldüğü gibi sekiz adımda açıklanmıştır. İlk adım, problemin amaçlarının, parametrelerinin, genel çözüm alanının belirlenmesidir. İkinci adımda, genel meta-model yönteminin belirlenmesi gerekmektedir. Araştırmacının bu adımda vereceği karar sonraki çalışmalarını tamamen etkileyeceğinden dikkatli seçim yapılmalıdır. Şekil 5'te meta-model yöntemleri verilmektedir. Üçüncü adımda meta-model yöntemine uygun deney tasarımı seçilir. Bu konu ayrı bir bölümde açıklanmıştır. Dördüncü adımda deney tasarımı uyarınca benzetim denemeleri yapılır ve girdi/çıktı verileri elde edilir. Beşinci adımda, meta-model kurulur. Altıncı adımda, meta-modelin geçerliliği incelenir. Standart başarımlar ölçütleri kullanılarak değerlendirme yapılır. Bu konu ayrı bir bölümde açıklanmıştır. Meta-modelin geçerli bulunup bulunmamasına göre ya işlemlere devam edilir yada ikinci adıma geri dönülür. Seçilecek başka bir meta-model yöntemine göre işlemler tekrar edilir. Yedinci adımda, uygun bulunan meta-model eniyileme algoritması ile çalıştırılarak en iyi değerler elde edilir. Sonuçlar kabul edilebilir ise meta-modelden elde edilen değerler benzetim modeli ile elde edilebilecek değerlerin bir tahmini olduğundan benzetim modeli kullanılarak sonuçlar doğrulanır. Sonuçlar kabul edilebilir bulunmaz ise ikinci adıma dönülür ve seçilecek başka bir meta-model yöntemine göre işlemler tekrar edilir.

Bu tezde kriging meta-modeli üzerinde durulacağından çalışmanın bundan sonraki kısımlarında ilgili konulara yer verilecektir.

### **2.3.1. Meta-modelin Geçerliliği**

Meta-model kurulmasında yapılması gereken iki temel adım vardır. Bunlardan birincisi, arama uzayında (çözüm kümesi) örnek noktaların seçilmesi, ikincisi ise bu örnek noktalar için uygun modelin bulunmasıdır (Chen et al., [30]).

Meta-modeller, modelin yerine kullanılmadan önce geçerliliğinin incelenmesi gereklidir. Bu aşama benzetim modeli yerine kullanılacak meta-modelin uygun olup olmadığını, değilse hangi meta-modelin kullanılacağına seçimi için zorunlu bir adımdır.

Birçok farklı meta-model türü olduğundan en iyi modelin seçilmesi için literatürde farklı yöntemler önerilmiştir.

Bir meta-modelin geçerliliği diğer bir deyişle kalitesi iki yolla değerlendirilebilir. Bunlar ya gözlem noktalarındaki tahmin geçerliliği ya da model kurulurken kullanılmayan yeni noktalar için üretilen verilerin tahmin geçerliliği hesaplanarak yapılır (Martin and Simpson, [31]).

Kriging meta-modelleri en iyi yansız doğrusal tahmin edici olduğundan gözlem (deney) değerleri için kesin tahmin (sıfır hata değerli) vermektedir. Kriging meta-modellerinin bu özelliğinden dolayı başarımlarını değerlendirmek için literatürde en çok kullanılan yöntemler;

- i. Çapraz geçerlilik (cross-validation),
- ii. Modelden elde edilen bağımsız veri kümesi ile geçerlilik yöntemleridir.

Çapraz geçerlilikte, bir gözlem (deney) sonucu geçerlilik için kullanılmak üzere ayrılır. Meta-model n-1 veri kullanılarak oluşturulur. Bu işlem her gözlem için (n defa) tekrar edilir. Meta-modelin uygunluğu için bu n veri kullanılarak başarımlar ölçülür hesaplanır. Currin et al. [32] kriging meta-modelleri için çapraz geçerlilik yöntemini meta-model geçerlilik yaklaşımı olarak önermişlerdir (Martin and Simpson, [31]). Çapraz geçerlilik yönteminde deney sayısının bir eksiği ile kriging modeli oluşturulup deney sayısı kadar tekrar yapıldığından oldukça zaman alıcı bir işlem yoğunluğu ortaya çıkmaktadır.

Bağımsız veri kümesi ile geçerlilik, değerlendirmesinde n genişliğine sahip veri kümesi iki veri kümesine bölünür. Birinci veri kümesi meta-model kurulurken, ikinci veri kümesi meta-modellerin geçerliliğinin ölçülmesinde kullanılır. Simpson [33] çalışmasında kriging meta-modelinde kullanılan tüm gözlem noktaları için sıfır hatalı tahmin verdiği için dolayı modelin geçerliliğini değerlendirmek için rassal olarak belirlenen ilave geçerlilik noktalarının kullanılmasını önermiştir.

Bu tez çalışmasında da bu yöntem tercih edilmiş olup LHT ile model doğrulama verileri üretilmiştir.

Meta-modellerin geçerliliği standart uygunluk ölçütleriyle değerlendirilir. Aşağıda yaygın kullanılan yedi ölçüt verilmektedir. Burada  $y_i$  gözlem değeri,  $\hat{y}_i$  meta-modelden elde edilen tahmin değeri, n gözlem sayısı ve k meta-modeldeki açıklayıcı değişken sayısıdır.

a. Ortalama Hata Karesi;

$$OHK = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.5)$$

b. Ortalama Hata Karesi Karekökü;

$$OHKK = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2} \quad (2.6)$$

c. Ortalama Mutlak Hata;

$$OMH = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i| \quad (2.7)$$

d. En büyük Hata Karesi;

$$EHK = \max_{i=1, \dots, n} \{(y_i - \hat{y}_i)^2\} \quad (2.8)$$

e. En büyük Mutlak Hata;

$$EMH = \max_{i=1, \dots, n} \{|y_i - \hat{y}_i|\} \quad (2.9)$$

f. Ortalama Mutlak Göreceli Hata;

$$OMGH = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| \quad (2.10)$$

g.  $R^2$  Katsayısı;

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (\bar{y} - \hat{y}_i)^2} \quad (2.11)$$

h. Ayarlanmış  $R_a^2$  Katsayısı;

$$R_a^2 = 1 - (1 - R^2) \left( \frac{n-1}{n-k-1} \right) \quad (2.12)$$

### 2.3.2. Meta-Model ile Benzetim Eniyilemesi

Benzetim modeli yerine kullanılacak Şekil 2.3 ile verilen meta-modellerden biri geçerli meta-model olarak seçildikten sonra doğrusal ve doğrusal olmayan matematiksel eniyileme yöntemlerinden uygun olanı kullanılarak en iyi çözüm elde edilir. Matematiksel çözümlerin kullanılmadığı durumlarda ise sezgisel yöntemler kullanılarak en iyi çözüm araştırılır.

Kriging meta-modeli matematiksel çözümlere uygun yapıda olmadığından dolayı seçilen kriging meta-modeli çözüm kümesinin büyüklüğüne göre ya girdi değişkenlerinin tüm kombinasyonlarını tarayacak arama algoritmaları veya sezgisel algoritmalar (tavlama benzetimi, tabu arama, genetik algoritmalar, sürü algoritmaları, evrimsel algoritmalar vb.) kullanılarak en iyi çözüm araştırılır.

## 2.4. Benzetimde Kriging Meta-modeli

Sacks et all. [20] kriging meta-modelini belirli benzetim modellerine uygulamışlardır. Van Beers and Kleijnen [21] olasılıklı benzetim modellerine kriging meta-model olarak uygulayarak BE'de kullanmıştır. Daha sonra Biles et all. [34] kriging meta-modelini kısıtlı BE'de kullanmışlardır.

Olasılıklı kesikli sistem benzetim modellerinin eniyileme çalışmalarının tamamında OK yöntemi meta-model olarak benimsenmiştir.

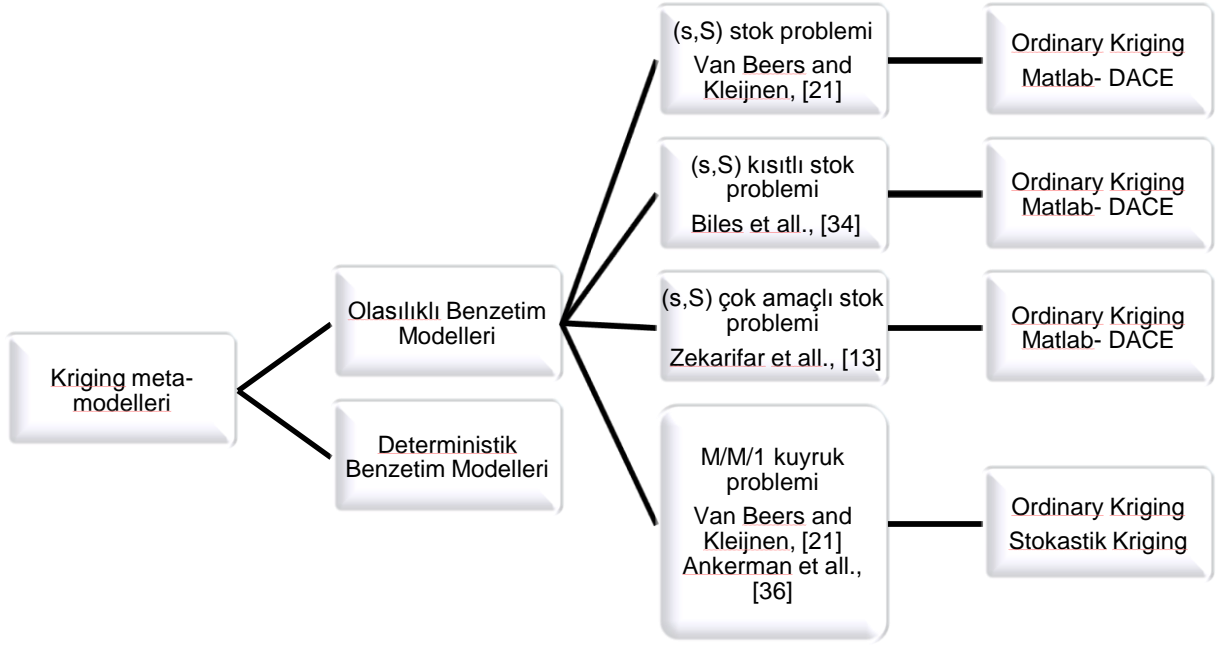
Kriging meta-modelleri en iyi yansız tahmin edicidir. Bütün doğrusal tahmin ediciler arasında en küçük ortalama hata kareli tahmin edicidir [11; 21; 35]. Kriging meta-modelleri yapısı gereği kesin tahmin edicidir. Kriging modelinde kullanılan tüm deney (gözlem) noktaları için sıfır hatalı tahmin verir [30; 35]. Kriging meta-modelleri, geniş deney alanlarından (çözüm kümesi) elde edilen verilere daha uygundur ve genel modellerdir [20; 11]. Kriging meta-modelleri doğrusal ve doğrusal olmayan fonksiyonlara eşit olarak uygunluk sağlar (Simpson et all., [11]). Ayrıca kriging meta-modelleri birçok farklı ve karmaşık cevap fonksiyonları için de uygun bir seçimdir (Martin and Simpson, [31]).

Kriging meta-modelleri, cevaplardaki değişimleri kapsayan yeterli sayıdaki örnek veriden elde edilen konumsal korelasyon fonksiyonunun çeşitliliği yüzünden esnek modellerdir [11; 31]. Regresyonda tek bir parametre kümesi için elde edilen meta-model (sabit model) arama uzayının (yerel veya genel) tümü için kullanılır. Kriging meta-modelleri, parametrelerini (ağırlık), her bir tahmin noktasındaki girdi değişkenine göre uyumlaştırarak her seferinde yeniden hesaplar (Van Beers and Kleijnen, [35]).

Bu ifade her bir tahmin noktası için varyogram (veya korelogram) vektörünün yeniden hesaplanması anlamına gelir. Böylece kriging yapısı gereği ağırlıklar değişir. Bu işlemde hesaplama yükü  $[O(n) = n^3 \times \text{tahmin noktası sayısı}]$  kadar bir işlem sayısı etmektedir. Bu durum probleme çözüm zorluğu katmamaktadır.

Olasılıklı kesikli sistemlerin BE'sinde günümüze dek yapılan çalışmalarda meta-model olarak kriging kullanımı, problem türü ve eniyileme platformuna bağlı olarak Şekil 2.5 ile özetlenmiştir.

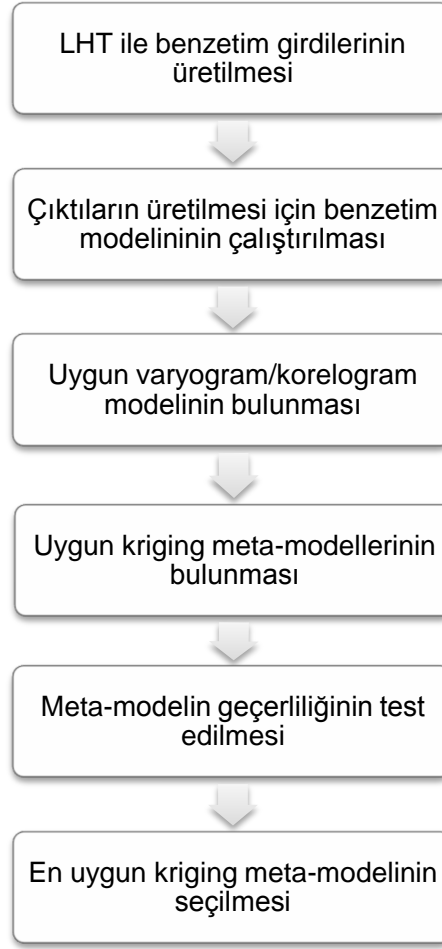




Şekil 2.5 Olasılıklı kesikli benzetim eniyilemesinde kullanılan kriging meta-model türleri

Olasılıklı BE’de kullanılan kriging meta-model türleri Şekil 2.5’te görüldüğü üzere oldukça kısıtlıdır. Yalnızca OK kullanılmış olup (s,S) stok sistemlerine ve M/M/1 kuyruk modellerine uygulanmıştır.

Uygun kriging meta-modelinin kurulma aşamaları ise Şekil 2.6’da verilmektedir.



Şekil 2.6 Uygun kriging meta-modeli oluşturma akış diyagramı

#### 2.4.1. Olasılıklı Kesikli Sistemlerde Kriging Uygulamaları

Olasılıklı BE'de kriging yöntemlerinin meta-model olarak kullanıldığı çalışmalar kısaca aşağıda özetlenmiştir.

Kriging meta-model olarak Sacs et all. [20]'nin öncü makalesinden bu yana sıklıkla uygulanıyor olmasına rağmen krigingin meta-model olarak rassal benzetimde neredeyse hiç kullanılmadığını Van Beers and Kleijnen [21] belirtmiştir. Kriging kapsamlı hesaplama gerektirir ve bu nedenle uygun yazılımlara ihtiyaç duymaktadır. Şekil 2.5'de verilen çalışmalarda yazarlar, olasılıklı benzetim için var olan bir yazılım olmadığı için Matlab üzerinde çalışan kendi yazılımlarını geliştirmişlerdir. Anılan çalışmada OK'nın teorik yapısı anlatılmıştır (Van Beers and Kleijnen, [21]). Ayrıca trendden arındırılmış kriging (detrended kriging) meta-modelinin teorik yapısı da verilmiştir. Trendden arındırılmış kriging meta-modeli orijinal verinin önceden

işlenerek sonuçlara OK yazılımını uygulamak olarak açıklanmıştır. Çalışmada OK ve trendden arındırılmış kriging meta-modeli M/M/1 kuyruk sistemine uygulanmıştır.

Van Beers and Kleijnen [35], rassal benzetimde kriging üzerine yapılan son araştırmaları incelemiştir. Yöntem açısından bakılırsa, kriging tahmin edicisi tüm deney alanını (arama uzayını) kapsar ve genel bir meta-modeldir. Çalışmada krigingin düşük dereceli polinomial regresyon modellerine göre daha iyi genel tahmin verebileceği gösterilmiştir. Kriging, parametreleri alan doldurma tasarımları sayesinde tahmin edilir. Basit ve en popüler tasarım olarak Latin Hiperküp Tasarım (LHT) kullanılmıştır. Çalışma OK yöntemi ile sınırlandırılmış ve OK tekniği ile ilgili kısaca bilgi verilmiştir.

OK yöntemi her girdi kombinasyonu için tek bir çıktıyı değerlendirir. Birden çok çıktının dikkate alındığı durumda her bir çıktı için tahmin edici hesaplanabilir. Makul sayıda benzetimin tekrarından sonra her girdi kombinasyonu için elde edilen çıktı ortalamasına kriging uygulanır. Van Beers and Kleijnen [35] tekrar sayısı arttıkça kriging tahmin edicisinin doğruluğunun da arttığını göstermişlerdir. Çalışmada rassal benzetim için kriging incelemeleri ve tasarımlarının geliştirilmesinde daha çok araştırma yapılması gerektiği ve gerçekçi rassal benzetimlerde kriging kullanımı için daha çok denemeler yapılması gerektiği sonucu vurgulanmıştır.

Biles et al., [34] kısıtlı benzetim optimizasyonu için kriging yönteminin potansiyelini göstermeyi amaçlamışlar ve OK yöntemini iki örnek üzerinde uygulamışlardır. Örneklerde stok sisteminde amaç fonksiyonunu eniyileyen stok değerlerinin ( $s$ ,  $S$ ) bulunması hedeflenmiştir.

Kleijnen [37] tek çıktı dikkate alarak benzetime duyarlılık analizi yapmak amacıyla krigingi uygulamıştır. Bu çalışmada kısıtlı BE'de kriging meta-modeli uygulanmıştır. Kriging meta-modeli, OK yöntemi ile ( $s$ , $S$ ) stok sistemi üzerinde uygulanmıştır. Bu sistemde stok değeri belli bir noktaya düşünce ( $s$ ) sipariş verilerek stok takviye edilmektedir. Stok seviyesi en çok  $S$  kadar olabilmektedir. Bu çalışmada amaç fonksiyonunu enküçükleyen  $s$  ve  $Q$  ( $Q=S-s$ ; ençok sipariş miktarı) değerleri aranmıştır. Birinci örnekte amaç fonksiyonu stokta tutma, stok eksikliği ve sipariş verme maliyetlerinin toplamını en küçükmektir. Kısıtlar ise; stokta tutma maliyeti ve stok eksikliği maliyeti olarak tanımlanmıştır. İkinci örnekte amaç fonksiyonu stokta

tutma ve sipariş verme maliyetlerinin toplamını en küçükleme. Kısıt ise; müşteri hizmet düzeyini (müşteri siparişinin hızla stoktan karşılanabilirliği) belirlenen seviyenin üzerinde tutmak olarak tanımlanmıştır. Çalışma; deney tasarımına uygun olarak yapılan denemeler ile elde edilen sonuçlara uygun OK meta-modeli parametrelerinin bulunması ve OK meta-modeli ile en iyi çözümün bulunması ve bulunan en iyi çözümün (s,Q) komşu kombinasyonları için benzetim modeli ile duyarlılık analizi yapılması aşamalarını içermektedir. Hesaplamalar Matlab DACE toolbox ile yapılmıştır.

Van Nieuwenhuysen et al. [38] BE'de, tamsayı girdilerle çalışabilen, kısıtlı, doğrusal olmayan eniyileme için yeni bir sezgisel algoritma önermişlerdir. Çalışmada OK yöntemi hakkında ayrıntılı bilgi verilmiştir. Alan doldurma tasarımlarından LHT deney tasarımı olarak kullanılmıştır. Bu çalışmada, Bashyam and Fu [39] tarafından çalışılan (s,S) stok probleminin kısıtları olan bir varyantı ile Kelton [1] tarafından çalışılan çağrı merkezi personelinin belirlenmesi problemi ele alınmıştır. Bu iki problem için bu çalışmada önerilen yeni sezgiselden elde edilen sonuçlar ve popüler BE yazılımı OptQuest sonuçları ile karşılaştırılmıştır.

Önerilen yeni sezgisel algoritmanın OptQuest'e göre kısıt sınırları içinde daha hızlı hareket etmekte ve daha az tasarım noktası ile daha kaliteli çözümler ürettiği belirtilmektedir. Çalışmada önerilen sezgisel algoritma OK yöntemini meta-model olarak kullanan bir algoritmadır.

Zakerifar et al. [13] kriging yöntemini çok amaçlı BE problemlerine uygulamışlardır. Gerçek hayat uygulamalarında, karar vericiler problemi tek bir amaç fonksiyonu ile tanımlayamazlar. Bu durumda, çok amaçlı eniyileme problemi (ÇAEP) oluşturulur. ÇAEP sıralı tek ölçütlü eniyileme problemi (kesin öncelikli eniyileme) olarak veya amaç fonksiyonlarından biri hariç diğerlerini kısıt olarak değerlendirerek çözülebilir. Bir diğer çözüm yöntemi ise amaç fonksiyonlarının ağırlıklandırılarak tek amaç fonksiyonu haline getirilmesidir. Zakerifar et al. [13] bu çalışmada ağırlıklandırma yöntemini seçmiştir. Kriging meta-modeli olarak OK yöntemi seçilmiştir. OK modeli üstel korelogram kullanılarak modellenmiştir. Önce kısıtlı eniyileme problemi için OK ile (s,S) stok sistemi problemi üzerinde çalışılmış, amaç fonksiyonu olarak toplam maliyetin en küçüklmesi, birinci kısıt olarak stokta tutma maliyeti, ikinci kısıt olarak ise yok satma maliyeti ele alınmıştır. CYY için Merkezi Kompozit Tasarımla (MKT) 13

deney yapılmış ve karesel (ikinci derece) model oluşturulmuştur. Kriging için LHT ile 20 nokta belirlenmiş ve Matlab DACE aracı ile kriging meta-modeli her iki amaç için kullanılarak uygun modeller oluşturulmuştur.

Çok amaçlı eniyileme için, birinci amaç toplam maliyetin enküçüklenmesi, ikinci amaç ise müşteri memnuniyet oranının enbüyüklenmesi olarak ele alınmıştır. Toplam maliyet, stokta tutma, sipariş ve yok satma maliyetlerini içerir. Sonuçlar pareto grafiği ile değerlendirilmiştir. Bu çalışmada kriging meta-modeli yönteminin ÇAEP için geleneksel CYY'den daha iyi sonuç verdiği gösterilmiştir. Kriging meta-modelin bu başarısı ÇAEP'in tek amaçlı probleme dönüştürülmesi ile elde edilmiştir.

#### **2.4.2 Kriging Meta-Modeli için Deney Tasarımı**

Meta-model kurulmasının birincil amacı, çıktıların doğru tahmin edilmesini sağlayacak şekilde benzetim modeli yerine kullanılacak bir model olması ve ihtiyaç duyulan hesaplama maliyetinin azaltılmasıdır. Gerekli örnek hacminin (deney sayısı) en küçüklenmesi ve hesaplama kaynakları açısından etkin yöntemin kullanılması da bu amaçların içinde yer alır (Chen et al., [30]).

Deney tasarımı benzetim çalışmalarının en önemli aşamalarından biridir (Jin et al., [40]). Modelin girdi değişkenlerinin hangi kombinasyonları için çalıştırılacağı belirlenir. BE'de ise meta-modelin yapısına ve eniyileme stratejisine uygun deney tasarımı kullanılması gerekir.

Regresyona dayalı CYY için genellikle faktoriyel tasarım türleri ve MKT kullanılır. MKT gibi faktoriyel tasarımların sorunu cevap yüzeyini kapsamamalarıdır. Kriging yöntemi bu tür tasarımlarla uygulanamaz (Biles et al., [34]). Çünkü kriging meta-modeli için tüm cevap yüzeyini temsil edecek deneylerin olması gerekir. Deney noktaları arasındaki uzaklıklara dayanarak hesaplanan korelasyon verileri tahmin doğruluğu üzerinde önemli etkiye sahiptir.

Kriging meta-modelleri en iyi yansız tahmin edicidir. Bütün doğrusal tahmin ediciler arasında en küçük ortalama hata kareli tahmin edicidir [11; 21; 35]. Kriging meta-modelleri yapısı gereği kesin tahmin edicidir. Kriging meta-modelinde kullanılan tüm deney (gözlem) noktaları için sıfır hatalı tahmin verir [30; 35].

Kriging meta-modelleri oluşturulurken kullanılacak deney sayısı oldukça önemlidir. Çünkü kriging konumsal ilişkiye dayalı hesaplanan ağırlıklarla deney (gözlem) verilerinin doğrusal bileşeni olarak hesaplanır. Bu ağırlıklar konumsal ilişkiyi gösteren varyogram, kovaryogram, korelogram modellerini kullanarak hesaplanır. Bu nedenle yeterli sayıda deney verisine ihtiyaç duyulur.

Literatürde kesin belirlenmiş bir deney sayısı hesaplama yöntemi olmamasına rağmen bu konuda yapılan bazı çalışmalar vardır. Örneğin, sıralı örnekleme (sıralı deney tasarımı) yaklaşımında örnek hacmi değişken sayısının 3 katı ile 12 katı arasında değişebilmektedir (Jin et al., [40]). Giunta and Watson, [41] 3 faktörlü problemlerde doğru cevap yüzeyi modeli oluşturmak için 15 ile 25 arasında örnek (deney) sayısının kullanılabileceğini önermişlerdir [42; 40].

Çizelge 2.7 Regresyon meta-modeli için deney sayıları

Meta-model Türü		Doğrusal Regresyon	Karesel Regresyon
Önerilen Deney Tasarımı		Tam Faktoriyel	Merkezi Kompozit Tasarım
Faktör sayısı, k	2	$2^2=4$	$2^2+2*2+1=9$
	3	$2^3=8$	$2^3+2*3+1=15$
	4	$2^4=16$	$2^4+2*4+1=25$
	..		

Konumsal ilişkiyi hesaplayacak sayıda deney yapılabilirse kriging meta-modelleri o zaman uygun bir tahmin (enterpolasyon) yöntemi olarak kullanılabilir. Çözüm kümesi (uzayı) de deney sayısını belirlemede önemli bir etkindir. Unutulmamalıdır ki deney sayısının fazlalığı krigingin yapısı gereği tahmin doğruluğunu artıran bir etkindir ancak yüksek sayıda deney sayısı kriging hesaplama yükünü çok fazla artırmaktadır.

Literatürde var olan kriging meta-model çalışmalarında makul sayıda deney ile çalışılmıştır. Örneğin; Simpson and Mistree [42] çalışmalarında 25 deneyi ortogonal diziliş ile yapmış ve kriging modeli oluşturmada, 25 farklı deneyi de kriging modellerinin kesin tahmin edici olmasından dolayı model doğrulamada kullanmışlardır. Van Beers and Kleijnen [21] rassal benzetimde OK kullandıkları çalışmalarında iki uygulama yapmışlardır. Birinci örnekte LHT ile elde edilen 20

deneyi model kurmak için, 5 deneyi de çapraz geçerlilik (cross-validation) için kullanmışlardır. İkinci örnekte LHT ile elde edilen 21 deney sonucunu model kurmak için, 4 deney sonucunu ise çapraz geçerlilik için kullanmışlardır. Van Beers and Kleijnen [35] bu çalışmalarında 36 deneyden oluşan verilerle çalışmışlar, geçerlilik değerlendirmesi için 10 deneyden oluşan bağımsız bir veri seti kullanmışlardır. Biles et all. [34] çalışmalarında OK modeli oluşturmak için 20 deneyi LHT ile elde etmişlerdir. Zekarifar et all. [13] (s,S) stok sistemi probleminde CYY için kullanılan 13 deneyi MKT ile, kriging meta-modeli için kullanılan 20 deneyi LHT ile elde etmişlerdir. Meta-model geçerlilik aşaması bu çalışmada uygulanmamıştır.

BE çalışmalarında (özellikle olasılıklı benzetimde) deney verileri pahalı veriler olduğundan (zaman vb. açıdan) makul sayıda deneyle çalışmak oldukça önemlidir. Bu çalışmanın konusu en uygun deney sayısı hesaplamak olmadığından, literatürde ki çalışmalar dikkate alınarak az veri kümesi ile daha iyi sonuç bulma üzerine yoğunlaşmıştır.

#### **2.4.2.1. Latin Hiperküp Tasarım**

Kriging meta-modellerinde parametre tahmini alan doldurma yöntemleri (space filling design) kullanılarak yapılır. Basit ve en popüler tasarım LHT'dir (Van Beers and Kleijnen, [35]). Bu tasarım uygun çözüm alanında ve en iyi çözüme yakın yerlerde deney yapılmasına olanak verir (Biles et all., [34]).

Kriging meta-modelleri için deney tasarımının alan doldurma özelliği olması istenen bir özelliktir. Deneylerin, amaç ve kısıtlar için daha fazla bilgi elde etmek üzere mümkün olduğunca tüm araştırma uzayını kapsamaları gerekmektedir (Van Nievehuyse et all., [38]). LHT Kriging için deney uzayını daha iyi kapsayacağından literatürde önerilmiş bir tasarımdır (Biles et all., [34]).

Dolayısıyla, LHT araştırma uzayını kapsadığından kriging için uygun bir tasarımdır (Biles et all., [34]). Bu nedenle benzetim araştırmacıları sıklıkla kriging meta-modellerine uygun benzetim girdi/çıkı (G/Ç) verilerini elde etmek için LHT kullanmışlardır (Kleijnen, [43]).

Deney tasarımının seçimi; meta-model oluşturma maliyeti ve yaklaşımın doğruluğu üzerinde büyük bir etkiye sahip olabilir. Kriging yöntemini kullanmak için gözlemler

kütleden homojen seçilmelidir. Gözlemler arasındaki uzaklık doğrudan parametrelerini etkilediğinden dolayı deney tasarımı kriging meta-modellerinin parametre tahmini için kritik öneme sahiptir.

LHT ilk kez 1979 yılında Mc Kay [44] tarafından bilgisayar deneyleri için tanımlanmıştır. Bu tasarım, her bir girdi değişkeni (faktör) eksenini “n” eşit aralıklarla bölen, Latin hiperküp örnekleme ile üretilmektedir (Santner et al., [45]). LHT bilgisayar deneyleri için uygundur. Fang and Sudjianto [46], LHT'nin s girdi değişkeninin n farklı değeri ile çalıştığını, LHT(n,s) olarak gösterildiğini ve nxs'lik matrisin her kolonunun {1,2, ..., n}'nin rassal permütasyonu olduğunu belirtmişlerdir. Böylece meta-model oluşturmada hangi girdi değişkenlerinin (faktörler) kombinasyonlarının seçileceği rassal olarak belirlenir.

Rassal olarak oluşturulan LHT iki soruna neden olabilir. Birincisi girdi değişkenleri çok yüksek korelasyona sahip olabilirler. İkincisi, deney bölgesinde geniş alanların incelenmesi mümkün olmayabilir. Bu sorunlardan kaçınmak için literatürde bazı çalışmalar yer almaktadır (Joseph and Hung, [47]).

Owen [48] ve Tang [49] ortogonal diziyeye dayalı LHT'leri önermişlerdir. Owen [50] girdi değişkenleri arasındaki ikili korelasyonları enküçükmek için çalışmalarda bulunmuştur. Tang [51] girdi değişkenlerinden kaynaklanan yüksek dereceli etkiler arasındaki korelasyonu dikkate alarak bu yaklaşımı genişletmiştir. Ye [52] tüm girdi değişkenlerinin sıfır korelasyona sahip olduğu ortogonal sütun LHT'ler için bir yöntem geliştirmiştir.

Bu tezdeki çalışmalarda rassal LHT kullanılmıştır. Örneğin iki girdi değişkenine sahip, 12 deney için (n=11, s=2) rassal bir LHT için tasarım matrisi Çizelge 2.8'de ve üç girdi değişkenine sahip, 18 deney için (n=18, s=3) rassal bir LHT için tasarım matrisi Çizelge 2.10'da verilmiştir. Çizelge 2.8 ve 2.10'da yer alan  $D_i$  sütunları i. değişkenin rassal sırasını göstermektedir.



Çizelge 2.8 İki girdi değişkenine (faktör) sahip rassal bir LHT matrisi

Deney Sayısı	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>
1	6	7
2	12	9
3	9	4
4	7	1
5	1	5
6	3	12
7	2	8
8	8	10
9	5	11
10	11	2
11	4	3
12	10	6

Çizelge 2.8 ile verilen deney tasarımında  $x_1$ ,  $x_2$  girdi değişkenleri,  $-3 \leq x_1, x_2 \leq 3$  aralığında değer alırken 12 deneye ait girdi değişkenleri değerleri Çizelge 2.9 ile verilmiştir.

Çizelge 2.9 Rassal LHT deney tasarımı için girdi değişkeni değerleri

Deney Sayısı	$x_1$	$x_2$
1	-0,273	0,273
2	3	1,364
3	1,364	-1,364
4	0,273	-3
5	-3	-0,818
6	-1,909	3
7	-2,455	0,818
8	0,818	1,909
9	-0,818	2,455
10	2,455	-2,455
11	-1,364	-1,909
12	1,909	-0,273

Çizelge 2.10 Üç girdi değişkenine sahip rassal bir LHT matrisi

Deney Sayısı	D <sub>1</sub>	D <sub>2</sub>	D <sub>3</sub>
1	13	14	14
2	14	16	8
3	4	11	4
4	9	12	16
5	1	1	13
6	16	10	18
7	12	9	3
8	7	5	10
9	10	13	15
10	17	2	5
11	18	4	9
12	5	15	2
13	6	17	6
14	3	3	11
15	8	18	12
16	15	7	7
17	11	6	1
18	2	8	17

Çizelge 2.10 ile verilen deney tasarımında girdi değişkenleri,  $-4 \leq x_1 \leq 4,5$ ;  $4,25 \leq x_2 \leq 4,25$ ;  $0 \leq x_3 \leq 4,25$  aralığında değer alırken 18 deneye ait girdi değişkenleri değerleri Çizelge 2.11’de verilmiştir.

Çizelge 2.11 Çizelge 2.10 ile verilen deney tasarımı için girdi değişkeni değerleri

Deney Sayısı	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>
1	2	2,25	3,25
2	2,5	3,25	1,75
3	-2,5	0,75	0,75
4	0	1,25	3,75
5	-4	-4,25	3
6	3,5	0,25	4,25
7	1,5	-0,25	0,5
8	-1	-2,25	2,25
9	0,5	1,75	3,5
10	4	-3,75	1
11	4,5	-2,75	2
12	-2	2,75	0,25
13	-1,5	3,75	1,25

Çizelge 2.11 devam ediyor

Deney Sayısı	$x_1$	$x_2$	$x_3$
14	-3	-3,25	2,5
15	-0,5	4,25	2,75
16	3	-1,25	1,5
17	1	-1,75	0
18	-3,5	-0,75	17

Daha anlaşılabilir olması ve deney noktalarının Cevap yüzeyindeki dağılımın daha anlaşılır olarak görünmesi için Çizelge 2.12'de  $X_1$  ve  $X_2$  girdi değişkenlerine karşı gelen tasarım noktaları düzlem üzerinde gösterilmektedir.

Çizelge 2.12 İki girdi değişkenine sahip rassal LHT'nin iki boyutlu gösterimi

		$x_2$											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_1$	1					x							
	2								x				
	3												x
	4			x									
	5											x	
	6							x					
	7												
	8										x		
	9				x								
	10						x						
	11		x										
	12										x		

### 3. KRİGİNG META-MODELLERİ

Kriging, coğrafi-istatistikte kullanılan bir enterpolasyon yöntemidir. Veriler, varyogram modeline, araştırılan parametrelere ve örnek sayısına göre ağırlıklandırılır. Bu yöntem Güney Afrikalı Maden Mühendisi Danie Krige onuruna Matheron tarafından bu ad verilmiştir (Cressie, [53]). En fazla kullanılan kriging, doğrusal kriging tekniklerinin bir grubu olan OK çeşitleridir.

Kriging, ölçülen noktalar arasındaki istatistiksel ilişkilere dayalı olduğundan sadece bir tahmin yüzeyi oluşturmaya yarayan bir teknik olmayıp aynı zamanda, tahminlerin kesinliği ve doğruluğu hakkında da birtakım ölçüler sağlar. Kriging, en iyi tahmin edici kavramıyla eşanlamlı olmuştur (Cressie, [54]).

Kriging, en iyi, doğrusal, yansız tahmin edici olarak bilinir. Kriging sürecinde, girdi verilerine (gözlem değerleri) atanan ağırlıklar toplamı bire eşittir ve tahmin hatası en düşük düzeydedir (Cressie, [54]).

Kriging, değişkenin gerçek değerlerine bağlı olmayan, onun konumsal dağılımını ve konumsal yapısını gösteren varyogramı kullanır. Uygun varyogram modeli mevcut ise, kriging, verilerin konumsal dağılımını temsil eden en uygun tahmini elde etmemizi sağlar. Kriging tekniği, sadece ikinci dereceden durağanlık varsayımını karşılayan durumlarda uygulanabilir. Bu şart, en azından, ortalama ve varyansın ilgili uzayda değişken olmaması diğer bir deyişle değişkenin ortalama ve kovaryansının sabit olduğu durum demektir. Eğer örnek verisinin ortalama ve varyansı bu durağanlık şartını karşılamıyorsa, kriging tekniğinden başka enterpolasyon tekniklerinin kullanılması gerekir.

Kriging tekniğini kullanmaya karar vermeden önce dikkat edilmesi gereken önemli bir konu homojenliktir. Bir gözlem noktasına ait bir veri olmalıdır. Eğer birden fazla veri varsa verilerin ortalaması kullanılır. Kriging tekniğini kullanmak için bir diğer basit gereksinim de varyogram hesaplayamaya yeterli miktarda veri noktasının olması gereğidir.

Krigingin amacı;  $Z(\mathbf{x})$  stokastik süreçinde,  $\mathbf{x} \in D$ .  $Z(\mathbf{x}) = \{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)\}$  olmak üzere  $x_0 \in D$  noktası için  $Z(x_0)$ 'ın tahmin değeri olan  $\hat{Z}(x_0)$ 'ı bulmaktır.

### 3.1. Kriging için Temel İstatistiksel Kavramlar

#### 3.1.1. Varyogram

Varyogram (yarı-varyogram veya yarı-varyans) tahmini, kriging ağırlıklarının belirlenmesinde kullanıldığından kriging'in en önemli adımıdır [55; 56]. Ayrıca varyogram coğrafi-istatistik araştırmalarının köşe taşıdır (Cressie and Hawkins, [55]). Yarı-varyogram kavramı (varyansın yarısı) ilk olarak Matheron [58] tarafından kullanılmıştır (Myers, [57]). Varyogram, ikinci dereceden durağanlık varsayımı ve mutlak (intrinsic) durağanlık hipotezi (uzaklık aralıkları için ortalama ve yarı-varyans mevcut olup ortalamadan bağımsızdır) sağlandığında verinin uzaklığa bağlı değişim oranını gösteren istatistiksel bir ölçüdür ve konumsal sürekliliğini açıklar. Varyogram değeri, uzaklık değeri arttıkça “menzil (range)” olarak adlandırılan bir uzaklık değerine kadar artmaya devam eder. Sıfıra yakın bir uzaklık değeri için varyogram değeri sıfırdan farklı bir değer alıyor ise bu değer “külçe etkisi (nugget-effect)” olarak adlandırılır (Cressie, [54]).

$Z(\mathbf{x})$  bir rassal süreç ve  $D$ , gözlem alanı olmak üzere  $\mathbf{x} \in D$ 'dir.  $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  gözlem noktaları için  $Z(\mathbf{x}) = \{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)\}$  rassal değişkeninin gözlem değerleridir.

$Z(\mathbf{x})$  rassal sürecindeki her iki gözlem değeri  $Z(x_i)$ ,  $Z(x_j)$  arasındaki varyogram değeri aşağıda verilen (3.1) ve (3.2) numaralı eşitlikler ile hesaplanır (Myers, [57]).

$$2\gamma(h) = 2\gamma(x_i - x_j) = \text{Var}(Z(x_i) - Z(x_j)) = E[(Z(x_i) - Z(x_j))^2] \quad (3.1)$$

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[(Z(x_i) - Z(x_j))^2] \quad (3.2)$$

İki gözlem değeri  $Z(x_i)$ ,  $Z(x_j)$ 'nin konumları  $(x_i, x_j)$  arasındaki Öklid uzaklık değeri  $h_{ij}$  aşağıda verilen (3.3) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$h_{ij} = \|x_i, x_j\| = \sqrt{(x_i - x_j)^T (x_i - x_j)} \quad (3.3)$$

Hesaplanan bu gözlem çiftleri arasındaki varyogram değerlerinin gözlem noktaları arasındaki uzaklığa göre grafiği çizilerek varyogram genel davranışı gözlemlenir.

$\gamma(h)$ , semivaryans (semivaryogram) olarak adlandırılmıştır.  $\gamma(h)$ , sadece  $h$ 'nin bir fonksiyonu olup kısaca varyogram olarak kullanılmaya devam edilecektir.

İkinci dereceden ve mutlak durağanlık hipotezlerinin sağlandığı varsayımı ile Matheron [58] varyogramı aşağıda verilen (3.4) ve (3.5) numaralı eşitlikler ile tanımlanmış ve gözlem değerlerinin varyogram tahmin edicisi olarak (3.6) numaralı eşitliği kullanmıştır.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} \text{Var}(Z(x_i) - Z(x_i + h)) \quad (3.4)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} E(Z(x_i) - Z(x_i + h))^2 \quad (3.5)$$

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2 \quad (3.6)$$

Burada  $h$  gözlemler arasındaki uzaklık operatörü olup,  $N(h)$  ise  $Z(x_i)$ ,  $Z(x_i + h)$  gözlem çiftlerinin sayısıdır (Myers, [57]). Cressie and Hawkins [55] ise (3.7) numaralı eşitlik ile verilen robust varyogram tahmin edicisini önermiştir.

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - Z(x_i + h))^2 \right]^{1/4} / \left( 0,457 + \frac{0,494}{N(h)} \right) \quad (3.7)$$

Her bir tahmin noktasında kiriging ağırlıklarının hesaplanabilmesi için bir teorik varyogram modelinin bulunması gereklidir. Teorik varyogram modeli deneysel (gözlemsel) varyogram verilerine uygun olmalıdır. Teorik varyogram modeli deneysel varyograma dayalı geliştirilir ve sadece uzaklığın (3.8) numaralı eşitlikte verildiği gibi parametrik bir fonksiyondur. Myers [57] aşağıdaki dört teorik varyogram modelini uzaklığın ( $h$ ) bir fonksiyonu olarak önermiştir.

$$\gamma(h) = f(h; a_0, a_1, a_2) \quad (3.8)$$

Küresel (spherical) Model:

$$\gamma(h) = \begin{cases} a_0 + a_1 \left[ 1,5 * \left( \frac{h}{a_2} \right) - 0,5 * \left( \frac{h}{a_2} \right)^3 \right] & \text{eğer } h \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } h = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.9)$$

Kuvvet (power) Modeli:

$$\gamma(h) = \begin{cases} a_0 + a_1 * h^{a_2} & \text{eğer } h \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } h = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.10)$$

Normal Dağılım (Gaussian) Modeli:

$$\gamma(h) = \begin{cases} a_0 + a_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-h^2}{a_2^2}\right)\right] & \text{eğer } h \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } h = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.11)$$

Üstel (exponential) Model:

$$\gamma(h) = \begin{cases} a_0 + a_1 \left[1 - \exp\left(\frac{-h}{a_2}\right)\right] & \text{eğer } h \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } h = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.12)$$

De Wijsian Modeli:

$$\gamma(h) = \begin{cases} a_0 + a_1 \log(h) & \text{eğer } h \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{eğer } h = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (3.13)$$

Burada  $a_0, a_1$  ve  $a_2$  model parametreleridir ve  $a_0$  parametresi yukarıda ifade edilen külçe etkisini göstermektedir.

### 3.1.2. Kovaryogram

$Z(x_i), Z(x_j)$  gözlem değerleri arasındaki kovaryogram (kovaryans) değeri aşağıdaki (3.14) numaralı eşitlik ile hesaplanır (Cressie [54]).

$$\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j)) = E[(Z(x_i) - \mu)(Z(x_j) - \mu)] \quad (3.14)$$

Kovaryans (kovaryogram) aşağıdaki notasyonlarla gösterilir.

$$\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j)) = c(Z(x_i), Z(x_j)) = c(x_i - x_j) = c(h) \quad (3.15)$$

$$c(0) = \text{Var}(Z(\mathbf{x})) = \sigma^2 \quad (3.16)$$

Kovaryogram tahmini ise aşağıda verilen (3.17) (3.18) ve (3.19) numaralı eşitlikler kullanılarak hesaplanır.

$$\hat{c}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - \mu) (Z(x_j) - \mu) \quad (3.17)$$

$$\hat{c}(h) = \frac{1}{N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} (Z(x_i) - \mu) (Z(x_i + h) - \mu) \quad (3.18)$$

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z(x_i) \quad (3.19)$$

Kovaryogram ile varyogram arasındaki ilişki aşağıda (3.20) numaralı eşitlik ile gösterildiği gibidir.

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E[(Z(x_i) - Z(x_j))^2] = E[((Z(x_i) - \mu) - (Z(x_j) - \mu))^2] \\ &= E[(Z(x_i) - \mu)^2] - 2E[(Z(x_i) - \mu) - (Z(x_j) - \mu)] + E[(Z(x_j) - \mu)^2] \\ &= \text{Var}[Z(x_i)] + \text{Var}[Z(x_j)] - (Z(x_j) - \mu) - 2E[(Z(x_i) - \mu) - (Z(x_j) - \mu)] \\ &= 2c(0) - 2c(h) \\ \gamma(h) &= c(0) - c(h) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Kriging ağırlıklarının hesaplanmasında varyogram yerine kovaryogram değerleri de kullanılmaktadır. Literatürde teorik kovaryogram modeli olarak aşağıda yer alan modeller yer almaktadır.

Küresel (spherical) Model:

$$c(h) = \begin{cases} a_0 \left( 1 - 1.5 \frac{h}{a_1} + 0.5 \left( \frac{h}{a_1} \right)^3 \right), & h \leq a_1 \text{ için} \\ 0, & \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Normal Dağılım (Gaussian) modeli:

$$c(h) = a_0 \exp\left(-\left(\frac{h}{a_1}\right)^2\right) \quad (3.22)$$

Üstel (exponential) model:

$$c(h) = a_0 \exp\left(\frac{-h}{a_1}\right) \quad (3.23)$$

Doğrusal model:

$$c(h) = \begin{cases} a_0 \left( 1 - \frac{h}{a_1} \right), & h \leq a_1 \text{ için} \\ 0 & \text{d. d.} \end{cases} \quad (3.24)$$



Matern v=5/2 modeli:

$$c(h) = a_0 \left( 1 + \sqrt{5} h/a_1 + 5h^2/a_1^2 \right) \exp(-\sqrt{5} h/a_1) \quad (3.25)$$

Matern v=3/2 modeli:

$$c(h) = a_0 \left( (1 + \sqrt{3} h/a_1) \exp(-\sqrt{3} h/a_1) \right) \quad (3.26)$$

### 3.1.3. Korelogram

$Z(x_i)$ ,  $Z(x_j)$  gözlem değerleri arasındaki korelasyon (korelogram) değeri aşağıda verilen (3.27), (3.28) ve (3.29) numaralı eşitlikler ile hesaplanır (Cressie, [54]).

$$r(Z(x_i), Z(x_j)) = \frac{c(Z(x_i)Z(x_j))}{\sqrt{\text{Var}(Z(x_i))\text{Var}(Z(x_j))}} \quad (3.27)$$

$$r(h) = \frac{c(h)}{c(0)} = \frac{c(h)}{\sigma^2} \quad (3.28)$$

Burada  $|r(h)| \leq 1$  değeri alabilir.

$$\hat{r}(h) = \frac{c(Z(x), Z(x+h))}{\sigma^2} \quad (3.29)$$

Özellikle belirli benzetim eniyilemesinde kriging ağırlıklarının hesaplanmasında varyogram ve kovaryogram yerine korelasyon değerleri de kullanılmaktadır. Literatürde en çok kullanılan teorik korelasyon modeli (3.30) numaralı eşitlikle verilmektedir [20; 59; 12]. Burada,  $\theta_i$  model parametresini,  $p_i$  ise modelin üstel derecesini göstermektedir.

$$r(h) = \exp\left(-\sum_{i=1}^k (\theta_i h_i)^{p_i}\right) = \prod_{i=1}^k \exp\left(-(\theta_i h_i)^{p_i}\right) \quad (3.30)$$

Gaussian, üstel ve doğrusal korelasyon modelleri aşağıda (3.31), (3.32) ve (3.33) numaralı eşitlikler ile verilmektedir.

Gaussian korelasyon modeli:

$$r(h) = \exp\left(-\sum_{i=1}^k (\theta_i h_i)^2\right) = \prod_{i=1}^k \exp\left(-(\theta_i h_i)^2\right) \quad (3.31)$$

Üstel korelasyon modeli:

$$r(h) = \exp\left(-\sum_{i=1}^k \theta_i h_i\right) = \prod_{i=1}^k \exp\left(-\theta_i h_i\right) \quad (3.32)$$

Doğrusal korelasyon modeli:

$$r(h) = \max(1 - \theta h, 0) \quad (3.33)$$

Yukarıda verilen modellere ek olarak aşağıdaki Matheron tarafından önerilen korelasyon modelleri de vardır ve (3.34) ve (3.35) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir (Mitchell and Morris, [59]).

$$r(h) = \exp(1 - \theta h) \left(1 + \theta h + \frac{\theta^2 h^2}{3}\right) \quad (3.34)$$

$$r(h) = \exp(-\theta h) (1 + \theta h) \quad (3.35)$$

Teorik varyogram, kovaryogram ve korelogram modellerinin seçimi ve parametre tahmini, ençok olabilirlik (maximum likelihood) veya enküçük kareler (least squares) tahmin edicileri kullanılarak yapılır. Bu tezde enküçük kareler yöntemi kullanılmıştır.

#### 3.1.4. Durağanlık

Bir  $Z(\mathbf{x})$  rassal sürecinde,  $\mathbf{x} \in D$ , eğer rassal değişkenin ortalaması sabit ve kovaryansı sadece  $h$ 'nin bir fonksiyonu ise sürecin ikinci dereceden durağan olduğu söylenir (Cressie, [54]). (3.36), (3.37) ve (3.38) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$E(Z(\mathbf{x})) = \mu, \text{Var}(Z(\mathbf{x})) = \sigma^2 \quad (3.36)$$

$$\text{Cov}(Z(x_i), Z(x_j)) = c(Z(x_i), Z(x_j)) = c(x_i - x_j) = c(h) \quad (3.37)$$

$$c(0) = \text{Var}(Z(\mathbf{x})) = \sigma^2 \quad (3.38)$$

$x_i, x_j \in D$  ve  $c(h)$  sadece  $h$ 'nin bir fonksiyonu ve  $h$ : uzaklık operatörüdür.

Bir  $Z(\mathbf{x})$  rassal sürecinde,  $\mathbf{x} \in D$ , eğer rassal değişkenin ortalamasının sabit ve varyogram değeri sadece  $h$ 'nin bir fonksiyonu ise sürecin mutlak durağan olduğu söylenir (Cressie, [54]). Bu durum (3.39) ve (3.40) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$E(Z(\mathbf{x})) = \mu \quad (3.39)$$

$$2\gamma(x_i - x_j) = 2\gamma(h) = \text{Var}(Z(x_i) - Z(x_j)) = E[(Z(x_i) - Z(x_j))^2] \quad (3.40)$$

### 3.2. Basit Kriging

$Z(\mathbf{x})$  ikinci dereceden ve mutlak durağanlık şartlarını sağlamalıdır [60; 57; 54]. Basit kriging, ortalaması sabit ve bilinen, kovaryans fonksiyonu (kovaryogram) bilinen, ikinci dereceden durağanlığa sahip durumları ifade etmektedir (Journel, [61]).

$Z(\mathbf{x})$  için varsayılan model (3.41) numaralı eşitlik ile gösterilmiştir.

$$Z(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (3.41)$$

$$E[\varepsilon(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.42)$$

$$E(Z(\mathbf{x})) = \mu(\mathbf{x}) = \mu \text{ sabit ve biliniyor} \quad (3.43)$$

$$\text{Var}(Z(\mathbf{x})) = \text{Var}(\varepsilon(\mathbf{x})) = \sigma^2 \quad (3.44)$$

$$\text{Var}(Z(x_i) - Z(x_j)) = 2\gamma(x_i - x_j) \quad (3.45)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) \quad (3.46)$$

$Z(x_0)$ 'ın en iyi yansız doğrusal tahmini (3.47) numaralı eşitlik ile gösterilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) + \mu (1 - \sum_i^n \lambda_i) \quad (3.47)$$

Burada  $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  ağırlık değerleridir.

Tahminin ortalama hata karesi (3.48) ve (3.49) numaralı eşitlik ile gösterilmiştir.

$$\text{MSE}(x_0) = E(Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2 \quad (3.48)$$

$$\text{Var}(Z(x_0) - \hat{Z}(x_0)) = E[(Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2] \quad (3.49)$$

Tahmin varyansını enküçükleyen ağırlıkların bulunması gerekir. Birinci dereceden türevi alınarak ağırlıkların bulunacağı doğrusal denklem sistemini elde edilir. Denklem sisteminin matris vektör çarpımı şeklinde gösterimi aşağıdaki (3.50) ile (3.53) numaralı eşitlikler arasında gösterilmiştir.

$$\Gamma \lambda = \gamma \quad (3.50)$$

$$\gamma = (\gamma(x_1 - x_0), \gamma(x_2 - x_0), \gamma(x_3 - x_0), \dots, \gamma(x_n - x_0))' \quad (3.51)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)' \quad (3.52)$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) \\ \gamma(x_2 - x_1) & \gamma(x_2 - x_2) & \dots & \gamma(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \gamma(x_n - x_n) \end{pmatrix} \quad (3.53)$$

Ve  $x_0$  için basit kriging tahmin edicisi (3.55) numaralı eşitlikte gösterildiği gibidir.

$$Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.54)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.55)$$

Basit kriging için tahmin varyansı (3.56) ve (3.57) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$\sigma^2(x_0) = \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) \quad (3.56)$$

$$\sigma^2(x_0) = \lambda' \gamma. \quad (3.57)$$

### 3.2.1. Kovaryans Fonksiyonuna Dayalı Basit Kriging

Ortalama tahmin hata karesi, (3.58) numaralı eşitlikte gösterildiği gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} (Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i))^2 &= (Z(x_0) - \mu)^2 + \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j (Z(x_i) - \mu)(Z(x_j) - \mu) - \\ &2 \sum_i^n \lambda_i (Z(x_0) - \mu)(Z(x_i) - \mu) \end{aligned} \quad (3.58)$$

(3.58) numaralı eşitlik Lagrange yöntemiyle çözüldüğünde, (3.59) numaralı eşitlik ile gösterilen denklem sistemi elde edilir.

$$\sum_j^n \lambda_j c(x_i - x_j) = c(x_0 - x_i), \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için.} \quad (3.59)$$

Bu eşitlik sistemlerini matris formunda yeniden yazılırsa,

$$c = \Sigma \lambda \quad (3.59)$$

elde edilir. Burada, kovaryogram matrisi, kovaryogram vektörü ve kriging katsayıları (3.60), (3.61) ve (3.62) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

$$\Sigma = \begin{vmatrix} c(x_1 - x_1) & c(x_1 - x_2) & \dots & c(x_1 - x_n) \\ c(x_2 - x_1) & c(x_2 - x_2) & \dots & c(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(x_n - x_1) & c(x_n - x_2) & \dots & c(x_n - x_n) \end{vmatrix} \quad (3.60)$$

$$c = (c(x_1 - x_0), c(x_2 - x_0), \dots, c(x_n - x_0))' \quad (3.61)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)' \quad (3.62)$$

Tahmin ağırlıklarını bulmak için (3.63) numaralı eşitlik kullanılır.

$$\lambda = \Sigma^{-1}c \quad (3.63)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için basit kriging tahmin edicisi (3.64) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.64)$$

Tahmin varyansı (3.65) numaralı eşitlik ile hesaplanır (Cressie, [54]).

$$\sigma^2(x_0) = c(0) - \sum_i^n \lambda_i c(x_i - x_0) \quad (3.65)$$

### 3.2.2. Korelogram Fonksiyonuna Dayalı Basit Kriging

BE çalışmalarında genellikle korelograma dayalı kriging modelleri kullanılmıştır [32; 59; 12]. Yukarıda verilen varyograma ve kovaryograma dayalı basit kriging tahminlerinde kovaryans ile korelasyon ilişkisinden faydalanarak gerekli işlemler yapılırsa korelograma dayalı basit kriging denklemleri elde edilir. Burada  $\Sigma$  veya  $\Gamma$  yerine R matrisi, c veya  $\gamma$  yerine r vektörü kullanılarak  $\lambda$  katsayıları bulunur.

(3.59) numaralı eşitlik ile gösterilen denklem sistemi, (3.66) numaralı eşitlik ile verilen korelogram, kovaryogram ilişkisinden yararlanılarak, (3.68) numaralı eşitlik ile gösterilen denklem sistemi elde edilir.

$$r(h) = \frac{c(h)}{c(0)} = \frac{c(h)}{\sigma^2} \quad (3.66)$$

$$\sum_j^n \lambda_j c(0)r(x_i - x_j) = c(0)r(x_0 - x_i), \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.67)$$

$$\sum_j^n \lambda_j r(x_i - x_j) = r(x_0 - x_i) , \text{ her } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.68)$$

Bu eşitlik sistemlerini matris formunda yeniden yazarsak (3.68) numaralı eşitlik elde edilir.

$$r = R\lambda \quad (3.68)$$

$$R = \begin{vmatrix} 1 & r(x_1 - x_2) & \dots & r(x_1 - x_n) \\ r(x_2 - x_1) & 1 & \dots & r(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x_n - x_1) & r(x_n - x_2) & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

$$r = (r(x_1 - x_0), r(x_2 - x_0), \dots, r(x_n - x_0))' \quad (3.70)$$

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)' \quad (3.71)$$

Tahmin ağırlıklarını bulmak için (3.72) numaralı eşitlikte verilen dönüşüm kullanılır.

$$\lambda = R^{-1}r \quad (3.72)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için basit kriging tahmin edicisi olarak,  $Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))'$  olmak üzere (3.73) numaralı eşitlik kullanılır.

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.73)$$

Tahmin varyansı (3.74) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = c(0) - \sum_i^n \lambda_i c(0)r(x_i - x_0) = c(0)[1 - \sum_i^n \lambda_i r(x_i - x_0)] \quad (3.74)$$

### 3.3. Ordinary Kriging

$Z(x)$  ikinci dereceden ve mutlak (intrinsic) durağanlık şartlarını sağlamalıdır. OK, ortalaması sabit ve bilinmeyen, varyogram fonksiyonu bilinen, mutlak (intrinsic) durağanlığa sahip durumları ifade etmektedir. OK için tahmin modelleri ve parametre tahminleri aşağıda ifade edildiği gibi hesaplanmaktadır [61; 57; 54; 56].

$Z(x)$  için varsayılan model (3.75), (3.76) ve (3.77) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$Z(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (3.75)$$

$$E[\varepsilon(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.76)$$

$$E[Z(\mathbf{x})] = \mu \text{ sabit ve bilinmiyor} \quad (3.77)$$

En iyi yansız doğrusal tahmin edici (3.78) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) \quad (3.78)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.79)$$

Ortalama tahmin hata karesi (3.80) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} \text{MSE}(x_0) = (Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2 = (Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i))^2 = & - \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + \\ & 2 \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) \quad (3.80) \end{aligned}$$

Ağırlıkları  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  bulmak için aşağıda (3.81) ve (3.82) numaralı eşitlikler ile verilen kısıtlı en küçükleme problemini elde edilir.

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.81)$$

Kısıtları altında;

$$\text{Min } (Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2 = \text{Min } (Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i))^2 \quad (3.82)$$

Lagrange çarpanları yöntemi ile  $L(\lambda, m)$  fonksiyonunu oluşturarak bu kısıtlı en küçükleme problemi çözümlerse,

$$L(\lambda, m) = - \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) - 2m(\sum_i^n \lambda_i - 1) \quad (3.83)$$

(3.83) numaralı eşitlik elde edilir ve  $\lambda_i$  lere ve  $m$ 'e göre kısmi türevleri alınırsa,

$$\frac{\delta}{\delta \lambda_i} L(\lambda, m) = -2 \sum_j^n \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2\gamma(x_0 - x_i) - 2m \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.84)$$

$$\frac{\delta}{\delta m} L(\lambda, m) = -2(\sum_i^n \lambda_i - 1) \quad (3.85)$$

(3.84) ve (3.85) numaralı eşitlikler elde edilir ve sıfıra eşitlenirse, (3.86) numaralı eşitlik sistemi elde edilir.

$$\sum_j^n \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + m = \gamma(x_0 - x_i), \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.86)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.87)$$

Bu eşitlik sistemleri matris biçiminde yeniden yazılırsa (3.88) numaralı eşitlik elde edilir.

$$\gamma_0 = \Gamma_0 \cdot \lambda_0 \quad (3.88)$$

Burada  $\Gamma_0$  matrisi,  $\gamma_0$  ve  $\lambda_0$  vektörleri (3.89) (3.90) ve (3.91) numaralı eşitlikler ile verilmektedir.

$$\Gamma_0 = \begin{vmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) & 1 \\ \gamma(x_2 - x_1) & \gamma(x_2 - x_2) & \dots & \gamma(x_2 - x_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \gamma(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.89)$$

$$\gamma_0 = (\gamma(x_1 - x_0), \gamma(x_2 - x_0), \gamma(x_3 - x_0), \dots, \gamma(x_n - x_0), 1)' \quad (3.90)$$

$$\lambda_0 = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m)' \quad (3.91)$$

Bu sistem  $\lambda_0$  için sadece ve sadece  $\Gamma_0$  matrisinin tersinin alınabildiği durumlarda tekil bir çözüme sahiptir. Sadece kabul edilebilir teorik varyogram ( $\gamma$ ) kesin pozitif tanımlıdır ve böylece  $\Gamma$  matrisinin tersi alınabilir.

$$\lambda_0 = \Gamma_0^{-1} \gamma_0 \quad (3.92)$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)'$ ,  $Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))'$  olmak üzere  $x_0$  için OK tahmin edicisi (3.93) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.93)$$

Her yeni tahmin noktası  $x_0$  için  $\gamma_0$ 'ın yeniden hesaplanması gerekir. Varyogram matrisi  $\Gamma_0$ ,  $x_0$  yeni tahmin noktası için değişmez. Ancak Gözlem verilerinin



pozisyonları değiştiğinde veya başka bir teorik varyogram modeli seğildiğinde varyogram matrisi  $\Gamma$  'da değişir.

OK tahmin varyansı literatürde kriging varyansı olarak da adlandırılır,  $\sigma^2(x_0)$  olarak gösterilir ve (3.94) ve (3.95) numaralı eşitlikler ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) + m \quad (3.94)$$

$$\sigma^2(x_0) = \lambda_0 \cdot \gamma_0 \quad (3.95)$$

Açıkça görüldüğü gibi  $\lambda_0$  ve  $\gamma_0$  bulunduğunda tahmin varyansı kolayca hesaplanabilmektedir.

Varyograma dayalı OK,  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$  olmak üzere aşağıdaki (3.96), (3.97) ve (3.98) numaralı eşitlikler ile verilen kapalı matris formunda da yazılabilir (Cressie, [54]).

$$\lambda' = (\gamma + \mathbf{1}(\mathbf{1}'\Gamma^{-1}\gamma)/\mathbf{1}'\Gamma^{-1}\mathbf{1})'\Gamma^{-1} \quad (3.96)$$

$$m = -(\mathbf{1} - \mathbf{1}\Gamma^{-1}\gamma)/(\mathbf{1}'\Gamma^{-1}\mathbf{1}) \quad (3.97)$$

$$\sigma^2(x_0) = \gamma'\Gamma^{-1}\gamma - (\mathbf{1}'\Gamma^{-1}\gamma - \mathbf{1})^2/(\mathbf{1}'\Gamma^{-1}\mathbf{1}) \quad (3.98)$$

### 3.3.1. Kovaryans Fonksiyonuna Dayalı Ordinary Kriging

Ortalama tahmin hata karesi, (3.99) ve (3.100) numaralı eşitlikler ile gösterildiği gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} (Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i))^2 &= (Z(x_0) - \mu)^2 + \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j (Z(x_i) - \mu)(Z(x_j) - \mu) - \\ &2 \sum_i^n \lambda_i (Z(x_0) - \mu)(Z(x_i) - \mu) \end{aligned} \quad (3.99)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.100)$$

Lagrange yöntemiyle çözüldüğünde, (3.101) ve (3.102) numaralı eşitlikler elde edilir.

$$\sum_j^n \lambda_j c(x_i - x_j) + m = c(x_0 - x_i), \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.101)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.102)$$

(3.101) ve (3.102) numaralı eşitlik sistemleri matris formunda yeniden yazılırsa, (3.103) numaralı eşitlik elde edilir.

$$c_o = \Sigma_o \lambda_o \quad (3.103)$$

$$\Sigma_o = \begin{pmatrix} c(x_1 - x_1) & c(x_1 - x_2) & \dots & c(x_1 - x_n) & 1 \\ c(x_2 - x_1) & c(x_2 - x_2) & \dots & c(x_2 - x_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(x_n - x_1) & c(x_n - x_2) & \dots & c(x_n - x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.104)$$

$$c_o = (c(x_1 - x_o), c(x_2 - x_o), \dots, c(x_n - x_o), 1)' \quad (3.105)$$

$$\lambda_o = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m)' \quad (3.106)$$

Tahmin ağırlıklarını bulmak için, (3.107) numaralı eşitlik kullanılır.

$$\lambda_o = \Sigma_o^{-1} \gamma_o \quad (3.107)$$

$x_o$  için OK tahmin edicisi (3.109) numaralı eşitlikteki gibidir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.108)$$

$$\hat{Z}(x_o) = \lambda' Z \quad (3.109)$$

OK tahmin varyansı (3.110) numaralı eşitlik ile hesaplanır (Cressie, [54]).

$$\sigma^2(x_o) = c(0) - \sum_i^n \lambda_i c(x_i - x_o) + m \quad (3.110)$$

Benzer şekilde kovaryograma dayalı OK aşağıdaki (3.111), (3.112) ve (3.113) numaralı eşitlikler ile verilen kapalı matris formunda da yazılabilir (Cressie, [54]).

$$\lambda' = (c + 1(1 - 1'\Sigma^{-1}c)/1'\Sigma^{-1}1)'\Sigma^{-1} \quad (3.111)$$

$$m = -(1 - 1'\Sigma^{-1}c)/(1'\Sigma^{-1}1) \quad (3.112)$$

$$\sigma^2(x_o) = c'\Sigma^{-1}c - (1'\Sigma^{-1}c - 1)^2/(1'\Sigma^{-1}1) \quad (3.113)$$

### 3.3.2. Korelalogram Fonksiyonuna Dayalı Ordinary Kriging

BE çalışmalarında genellikle korelograma dayalı kriging modelleri kullanılmıştır [20; 59; 32; 12]. Yukarıda verilen varyograma ve kovaryograma dayalı OK tahminlerinde kovaryans ile korelasyon ilişkisinden faydalanarak gerekli işlemler yapılırsa korelograma dayalı basit kriging denklemleri elde edilir.

Kovaryans fonksiyonuna dayalı OK eşitliklerinin çözümünden elde edilen (3.101) ve (3.102) numaralı eşitlikler üzerinde (3.114) ile verilen korelogram ve kovaryogram ilişkisinden faydalanarak gerekli işlemler yapılırsa (3.115) numaralı eşitlik ve gerekli sadeleştirme yapılırsa (3.116) numaralı eşitlik elde edilir.

$$r(h) = c(h)/c(0) = c(h)/\sigma^2 \quad (3.114)$$

$$\sum_j^n \lambda_j C(0)r(x_i - x_j) + m = c(0)r(x_o - x_i) , \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.115)$$

$$\sum_j^n \lambda_j r(x_i - x_j) + m/c(0) = r(x_o - x_i) , \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \text{ için} \quad (3.116)$$

(3.116) numaralı eşitlik sistemlerini matris formunda yeniden yazarsak, (3.117) numaralı eşitlik elde edilir.

$$r_o = R_o \lambda_o \quad (3.117)$$

$$R_o = \begin{pmatrix} 1 & r(x_1 - x_2) & \dots & r(x_1 - x_n) & 1 \\ r(x_2 - x_1) & 1 & \dots & r(x_2 - x_n) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x_n - x_1) & r(x_n - x_2) & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.118)$$

$$r_o = (r(x_1 - x_o), r(x_2 - x_o), \dots, r(x_n - x_o), 1)' \quad (3.119)$$

$$\lambda_o = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m/c(0))' \quad (3.120)$$

Tahmin ağırlıklarını bulmak için (3.121) numaralı eşitlik kullanılır.

$$\lambda_0 = R_0^{-1}r_0 \quad (3.121)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için OK tahmin edicisi, (3.123) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.122)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.123)$$

OK tahmin varyansı (3.124) numaralı eşitlik kullanılarak hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = c(0)[1 - \sum_i^n \lambda_i r(x_i - x_0)] + m \quad (3.124)$$

Burada denklem sisteminin çözümü için  $\Gamma$  ve  $\Gamma_0$  matrislerinin tersinin alınabilir olması ve sırasıyla matris ranklarının  $n$  ve  $n+1$  olması gerekir. Bu nedenle gözlem değerlerinden elde edilen varyogram matrisi değil teorik varyogram modelinden elde edilen varyogram modeli kullanılır.

$\lambda_0$  katsayıları  $\gamma_0$ 'a bağlı olarak değişeceğinden her girdi değişkeni kombinasyonu için tahmin katsayıları (ağırlıkları) değişir.  $\Gamma_0$  sadece teorik varyogram modelinden elde edilebilir.

Kriging tahmin varyansı; regresyon vb. meta-modellerde hesaplanamaz. Bu özellik kriginge ait bir özelliktir.

### 3.4. Üniversal Kriging

Üniversal kriging (ÜK), ortalaması bilinmeyen ancak fonksiyon yapısı bilinen, varyogram fonksiyonu bilinen, durağan olmayan durumları ifade etmektedir. Bir başka deyişle ortalamanın bir trende sahip olduğu ve bunun konum vektörünün bir fonksiyonu olarak ifade edildiği durumlarda kullanılan bir tahmin yöntemidir. ÜK için tahmin yöntemleri aşağıda açıklanmaktadır [63; 54].

$Z(\mathbf{x})$  için varsayılan model, (3.125), (3.126) ve (3.127) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$Z(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (3.125)$$

$$E[\varepsilon(\mathbf{x})] = 0 \quad (3.126)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^b \beta_j f_j(\mathbf{x}) \text{ ve } f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_b(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \quad (3.127)$$

$f_j(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x}$ 'e bağılı drift fonksiyonu ve  $b$  drift fonksiyonu sayısı olup regresyon fonksiyonunda yer alan açıklayıcı değişkenlerin vektör büyüklüğüdür.

En iyi yansız doğrusal tahmin edici (3.128) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) \quad (3.128)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1. \quad (3.129)$$

Tahminin ortalama hata karesi, (3.130) ile (3.134) numaralı eşitlikler arasında verilmiştir.

$$\text{MSE}(x_0) = E[Z(x_0) - \hat{Z}(x_0)]^2 = E[Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i)]^2 \quad (3.130)$$

$$E[\hat{Z}(x_0)] = \mu(x_0) = \sum_{j=0}^b \beta_j f_j(x_0) \quad (3.131)$$

$$E[\hat{Z}(x_0)] = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) = \sum_i^n \lambda_i E[Z(x_i)] \quad (3.132)$$

$$E[\hat{Z}(x_0)] = \sum_i^n \lambda_i (\sum_{j=0}^b \beta_j f_j(x_i)) \quad (3.133)$$

$$E[\hat{Z}(x_0)] = \beta_0 \sum_i^n \lambda_i + \beta_1 \sum_i^n \lambda_i f_1(x_i) + \beta_2 \sum_i^n \lambda_i f_2(x_i) + \dots + \beta_p \sum_i^n \lambda_i f_b(x_i) \quad (3.134)$$

$Z(x_0)$  için  $\hat{Z}(x_0)$  tahmin edicisi sadece aşağıda (3.135) ile (3.137) numaralı eşitliklerde verilen koşullarda yansızdır,  $E[Z(x_0)] = E[\hat{Z}(x_0)]$ .

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.135)$$

$$\sum_i^n \lambda_i f_j(x_i) = f_j(x_0) \text{ her } j = 1, 2, \dots, b \quad (3.136)$$

$$\begin{aligned} \text{MSE}(x_0) &= (Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2 = (Z(x_0) - \sum_i^n \lambda_i Z(x_i))^2 = - \sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + \\ &2 \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) \end{aligned} \quad (3.137)$$

Ağırlıkları  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  bulmak için aşağıdaki (3.138) ile (3.140) numaralar arasındaki eşitliklerde verilen kısıtlı en küçükleme problemini elde edilir.

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.138)$$

$$\sum_i^n \lambda_i f_j(x_i) = f_j(x_0) \text{ her } j = 1, 2, \dots, b \quad (3.139)$$

Kısıtları altında;

$$\text{Min } (Z(x_0) - \hat{Z}(x_0))^2 = \text{Min } (-\sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i)) \quad (3.140)$$

Lagrange çarpanları yöntemi ile  $L(\lambda, m)$  fonksiyonunu oluşturarak bu kısıtlı enküçükleme problemi çözümlürse,

$$\begin{aligned} L(\lambda, m) = & -\sum_i^n \sum_j^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + 2 \sum_i^n \lambda_i \gamma(x_0 - x_i) - 2m_0(\sum_i^n \lambda_i - 1) \\ & + 2(\sum_{k=1}^b m_k (f_k(x_0) - \sum_i^n \lambda_i f_k(x_i))) \end{aligned} \quad (3.141)$$

(3.141) numaralı eşitlik elde edilir. Bu eşitliğin  $\lambda_i$  lere ve  $m_k$ 'lere göre kısmi türevleri alınır (3.142), (3.143) ve (3.144) numaralı eşitlikler elde edilir.

$$\sum_j^n \lambda_j \gamma(x_i - x_j) + m_0 + \sum_{k=1}^b m_k f_k(x_i) = \gamma(x_0 - x_i), \text{ her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.142)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.143)$$

$$\sum_i^n \lambda_i f_k(x_i) = f_k(x_0) \text{ her } k = 1, 2, \dots, b \quad (3.144)$$

(3.142), (3.143) ve (3.144) numaralı eşitlikler, aşağıdaki (3.145) numaralı eşitlik ile verilen matris-vektör çarpımı şeklinde gösterilir.

$$Y_u = \Gamma_u \lambda_u \quad (3.145)$$

$$\Gamma_u = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccccc} \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) & f_1(x_1) & \dots & f_b(x_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \dots & f_1(x_n) & \dots & f_b(x_n) & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_b(x_1) & f_b(x_2) & \dots & f_b(x_n) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right| \end{array} \quad (3.146)$$

$$\gamma_u = (\gamma(x_1 - x_0), \dots, \gamma(x_n - x_0), f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_b(x_0), 1)' \quad (3.147)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, m_1, m_2, \dots, m_b, m_0)' \quad (3.148)$$

$$\lambda_u = \Gamma_u^{-1} \gamma_u \quad (3.149)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için ÜK tahmin edicisi aşağıdaki (3.151) numaralı eşitlikte verilmektedir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.150)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.151)$$

İki boyutlu (değişkenli) bir rassal süreç için doğrusal drift fonksiyonu (3.152) numaralı eşitlik ile ve karesel drift fonksiyonu ise (3.153) numaralı eşitlik ile gösterilir.

$$f_1(x_i) = x_{i(1)}, \quad f_2(x_i) = x_{i(2)} \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.152)$$

$$f_1(x_i) = x_{i(1)}, \quad f_2(x_i) = x_{i(2)}, \quad f_3(x_i) = x_{i(1)}^2, \quad f_4(x_i) = x_{i(2)}^2,$$

$$f_5(x_i) = x_{i(1)} * x_{i(2)} \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.153)$$

ÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  aşağıdaki (3.154) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) + m_0 + \sum_{j=1}^b m_j f_j(x_0) \quad (3.154)$$

ÜK doğrusal bir tahmin edici olmasına rağmen doğrusal olmayan gözlem değerlerinin tahmininde kullanılır.

Varyograma dayalı ÜK aşağıdaki (3.155) ve (3.156) numaralı eşitliklerde verildiği gibi kapalı matris formunda da yazılabilir (Cressie, [54]).

$$\lambda' = (\gamma + F(F'\Gamma^{-1}F))^{-1} (f - F'\Gamma^{-1}\gamma)' \Gamma^{-1} \quad (3.155)$$

$$m = -(f - F\Gamma^{-1}\gamma)' (F'\Gamma^{-1}F)^{-1} \quad (3.156)$$

Burada  $F$ ,  $f_b(x)$ 'lerden oluşan  $n \times b$  boyutlu matris,  $f$  ise  $f_b(x_0)$ 'lerden oluşan  $b$  boyutlu vektörü ifade etmektedir.

Üç boyutlu (değişkenli) bir rassal süreç için doğrusal drift fonksiyonu (3.157) numaralı eşitlik ile ve karesel drift fonksiyonu ise (3.158) numaralı eşitlik ile gösterilir.

$$f_1(x_i) = x_{i(1)}, f_2(x_i) = x_{i(2)}, f_3(x_i) = x_{i(3)} \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.157)$$

$$f_1(x_i) = x_{i(1)}, f_2(x_i) = x_{i(2)}, f_3(x_i) = x_{i(3)}, f_4(x_i) = x_{i(1)}^2, f_5(x_i) = x_{i(2)}^2, \\ f_6(x_i) = x_{i(3)}^2, f_7(x_i) = x_{i(1)} * x_{i(2)}, f_8(x_i) = x_{i(1)} * x_{i(3)}, f_9(x_i) = x_{i(2)} * x_{i(3)} \\ \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.158)$$

### 3.4.1. Kovaryans Fonksiyonuna Dayalı Ünlversal Kriging

Varyogram ile kovaryogram arasındaki  $\gamma(h) = c(0) - c(h)$  ilişkisinden dolayı, (3.142), (3.143) ve (3.144) numaralı eşitlikler, (3.159), (3.160) ve (3.161) numaralı eşitlikler şeklinde yazılabilir.

$$\sum_j^n \lambda_j c(x_i - x_j) + m_0 + \sum_{k=1}^b m_k f_k(x_i) = c(x_0 - x_i), \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.159)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.160)$$

$$\sum_i^n \lambda_i f_k(x_i) = f_k(x_0) \quad \text{her } k = 1, 2, \dots, b \quad (3.161)$$

(3.159), (3.160) ve (3.161) numaralı eşitlikler aşağıda (3.162) numaralı eşitlik ile verilen matris-vektör çarpımı şeklinde ifade edilir.

$$c_u = \sum_u \lambda_u \quad (3.162)$$

$$\sum_u = \begin{vmatrix} c(x_1 - x_1) & c(x_1 - x_2) & \dots & c(x_1 - x_n) & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_b(x_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(x_n - x_1) & c(x_n - x_2) & \dots & c(x_n - x_n) & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_b(x_n) & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_b(x_1) & f_b(x_2) & \dots & f_b(x_n) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.163)$$



$$c_u = (c(x_1 - x_0), c(x_2 - x_0), \dots, c(x_n - x_0), f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_b(x_0), 1)' \quad (3.164)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, m_1, m_2, \dots, m_b, m_0)' \quad (3.165)$$

$$\lambda_u = \Sigma_u^{-1} c_u \quad (3.166)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için ÜK tahmin edici (3.168) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.167)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.168)$$

ÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  (3.169) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i - x_0) + m_0 + \sum_{j=1}^b m_j f_j(x_0) \quad (3.169)$$

Benzer şekilde kovaryograma dayalı ÜK (3.170) ve (3.171) numaralı eşitliklerde verildiği gibi kapalı matris formunda da yazılabilir (Cressie [54]).

$$\lambda' = (c + F(F'\Sigma^{-1}F)^{-1}(f - F'\Sigma^{-1}c))'\Sigma^{-1} \quad (3.170)$$

$$m = -(f - F\Sigma^{-1}c)'(F'\Sigma^{-1}F)^{-1} \quad (3.171)$$

### 3.4.2. Korelogram Fonksiyonuna Dayalı Ünsel Kriging

BE çalışmalarında genellikle korelograma dayalı kriging modelleri kullanılmıştır [20; 59; 32; 12]. Yukarıda verilen varyograma ve kovaryograma dayalı ÜK tahminlerinde kovaryans ile korelasyon ilişkisinden faydalanarak gerekli işlemler yapılırsa korelograma dayalı ünsel kriging denklemleri elde edilir.

Kovaryans fonksiyonuna dayalı ÜK (3.159), (3.160) ve (3.161) numaralı eşitlikler (3.172) numaralı eşitlikte ki kovaryogram ve korelogram ilişkisinden faydalanarak (3.173) numaralı eşitlik yazılabilir ve gerekli işlemler yapıldığında (3.174), (3.175) ve (3.176) numaralı eşitlikler elde edilir.

$$r(h) = \frac{c(h)}{c(0)} = \frac{c(h)}{\sigma^2} \quad (3.172)$$

$$\sum_j^n \lambda_j \sigma^2 r(x_i - x_j) + m_0 + \sum_{k=1}^b m_k f_k(x_i) = \sigma^2 r(x_0 - x_i), \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.173)$$

$$\sum_j^n \lambda_j r(x_i - x_j) + m_0/\sigma^2 + 1/\sigma^2 \sum_{k=1}^b m_k f_k(x_i) = r(x_0 - x_i), \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n \quad (3.174)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.175)$$

$$\sum_i^n \lambda_i f_k(x_i) = f_k(x_0) \quad \text{her } k = 1, 2, \dots, b \quad (3.176)$$

(3.174), (3.175) ve (3.176) numaralı eşitlikler aşağıdaki verilen matris-vektör çarpımı şeklinde ifade edilir.

$$r_u = R_u \lambda_u \quad (3.177)$$

$$R_u = \begin{pmatrix} 1 & r(x_1 - x_2) & \dots & r(x_1 - x_n) & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \dots & f_b(x_1) & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x_n - x_1) & r(x_n - x_2) & \dots & 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \dots & f_b(x_n) & 1 \\ f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots & f_1(x_n) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_b(x_1) & f_b(x_2) & \dots & f_b(x_n) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.178)$$

$$r_u = (r(x_1 - x_0), r(x_2 - x_0), \dots, r(x_n - x_0), f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_b(x_0), 1)' \quad (3.179)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, m_1/\sigma^2, m_2/\sigma^2, \dots, m_b/\sigma^2, m_0/\sigma^2)' \quad (3.180)$$

$$\lambda_u = \Sigma_u^{-1} r_u \quad (3.181)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için ÜK tahmin edici (3.183) numaralı eşitlikte verildiği gibidir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (3.182)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (3.183)$$

ÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  (3.184) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sigma^2 [1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i r(x_i - x_0)] + m_0 + \sum_{j=1}^b m_j f_j(x_0) \quad (3.184)$$

### 3.5. Lognormal Kriging

Eğer veri  $\{Z(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in D\}$  çok fazla çarpık ise koşullu beklenen değeri doğrusal olmayabileceğinden, doğrusal tahmin ediciler en iyi seçenek olmayabilir. Lognormal kriging (LK), bir doğrusal olmayan kriging algoritmasıdır. Normal dağılım elde etmek için verilere logaritmik dönüşüm uygulanır. Doğrusal olmayan kriging yöntemlerinin tamamı, orijinal verilere doğrusal olmayan dönüşüm uygulanmış doğrusal kriginglerdir. Geri dönüşüm, üstel etkisinden dolayı tahmin hatalarına karşı duyarlıdır. Bu hassaslıktan dolayı doğrusal olmayan kriging daha az popüler olmuştur [64;65]. Lognormal rassal bir süreç  $\{Z(\mathbf{x}): \mathbf{x} \in D\}$ , pozitif değerli bir süreçtir ve  $Y(\mathbf{x}) = \ln Z(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D$ , normal dağılıma sahip bir süreçtir ( $Y(\mathbf{x})$ 'in tüm sonlu boyutlu dağılımları normal dağılıma sahiptir). Bazen  $Y(\mathbf{x})$ 'i daha iyi tanımlayabilmek için  $Z(\mathbf{x})$ 'e pozitif bir sabit sayı eklenebilir. Burada  $Y(\mathbf{x})$ 'nin mutlak durağan olduğu kabul edilmektedir. OK'de olduğu gibi LK'nin amacında  $Z(\mathbf{x}) = \{z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)\}$  rassal değişkeninin gözlem değerlerinden,  $x_0 \in D$  için  $Z(x_0)$ 'in tahmin değerini  $\hat{Z}(x_0)$  hesaplamaktır.

Bu kısımda  $\hat{Z}(x_0)$  tahmin değerinin hesaplanması ele alınacaktır. İlk adım olarak problem,  $Z$  ölçeğinden  $Y$  ölçeğine dönüştürülür. Böylece (3.185) numaralı eşitlik ile  $x_0$  tahmin noktası için  $Y$  ölçeğinde kriging tahmini elde edilir.

$$\hat{Y}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \ln Z(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(x_i). \quad (3.185)$$

$\hat{Y}(x_0)$  'ın  $\hat{Z}(x_0)$  'a geri dönüşüm değeri yanlı bir tahmindir.  $Y(\mathbf{x})$ ,  $\mu_Y$  ortamalı ve  $\gamma_Y$  varyogramlı mutlak durağan normal dağılıma sahip bir süreç olsun ve varyans fonksiyonu  $\sigma_Y^2 = \text{Var}(Y(\mathbf{x})), \mathbf{x} \in D$  olarak belirlensin.

Böylece  $x_0 \in D$  için  $Z(x_0)$ 'in yansız tahmin edicisi olarak  $\hat{Y}(x_0)$  'ın  $\hat{Z}(x_0)$  'a geri dönüşümü (3.186) numaralı eşitlik ile gerçekleştirilir;

$$\hat{Z}(x_0) = \exp \left( \hat{Y}(x_0) + \frac{\sigma_{Y,k}^2}{2} - m_Y \right) \quad (3.186)$$

Burada  $\sigma_{Y,k}^2$   $Y$ 'nin kriging varyansı ve  $m_Y$  ise Lagrange çarpanı değeridir (Cressie, [54]). Literatürde, Journell and Huijbregts [66] ve Dowd [67] gibi LK üzerine yapılmış birçok çalışma vardır.

### 3.6. Regresyon Kriging

Karma tahmin yöntemleri, çoklu regresyon yöntemi ve coğrafi tahmin yöntemlerinin bileşimidir. Regresyon-kriging (RK) karma bir tahmin yöntemidir. Regresyon gibi yöntemlerle yapılan tahmin değerleri ile gözlem değerleri farkından elde edilen artık değerlerin (residual) kriging yöntemi ile tahmin edilmesi olarak tanımlanabilir. Literatürde artıkların krigingi olarak ta adlandırılmaktadır.

Artık değer = gözlem değeri – tahmin değeri

$Z(\mathbf{x})$  için varsayılan model (3.187) ve (3.188) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$Z(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (3.187)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^p \beta_k q_k(\mathbf{x}) \text{ ve } \mathbf{x} \in D. \quad (3.188)$$

RK tahmin edicisi (3.189) ve (3.190) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{k=0}^p \beta_k q_k(x_0) + \sum_i^n \lambda_i \varepsilon(x_i) \quad (3.189)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (3.190)$$

Modelin birinci kısmı regresyon modelini, ikinci kısmı ise kriging (basit kriging kullanılmıştır) modelini gösterir. Burada  $\hat{\beta}_k$  k. ortalamanın tahmin modelinin katsayılarını,  $q_k$  ise k. değişkeni gösterir.

RK modelini matris biçiminde yeniden yazarsak (3.191) ve (3.192) numaralı eşitlikler elde edilir.

$$Z = \mathbf{q}'\beta + \varepsilon \quad (3.191)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \mathbf{q}'_0 \hat{\beta} + \lambda'_0 \varepsilon \quad (3.192)$$

Burada  $\varepsilon$  regresyondan gelen artık değerleri,  $q_0$ ,  $x_0$ 'daki değişkenler vektörünü,  $\hat{\beta}$  model katsayıları vektörünü,  $\lambda_0$  kriging katsayılarını göstermektedir. Artıkların konumsal korelasyonu dikkate alındığında, model katsayıları aşağıdaki genelleştirilmiş en küçük kareler tahmin edicisiyle çözülür (Cressie, [54]).

$$\hat{\beta} = (\mathbf{q}'\Sigma^{-1}\mathbf{q})^{-1}\mathbf{q}'\Sigma^{-1}Z \quad (3.192)$$

Burada  $q$  gözlem noktasındaki değişkenler matrisi,  $Z$  örnek gözlem değerleri vektörü,  $\Sigma$  ise artık değerlerin  $n \times n$  boyutlu kovaryogram matrisidir.

$$\Sigma = \begin{vmatrix} c(x_1 - x_1) & \dots & c(x_1 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ c(x_n - x_1) & \dots & c(x_n - x_n) \end{vmatrix} \quad (3.193)$$

Kovaryogram matrisi,  $c(h)$  teorik kovaryogram modeli kullanılarak tahmin edilir.

RK, artık değerlerin krigingi ile lineer regresyon modelini birleştiren melez bir tahmindir.

RK'nın genel yapısı matris notasyonu olarak aşağıdaki (3.194) numaralı eşitlikte gösterildiği gibi yeniden yazılır (Christensen, [68]).

$$\hat{Z}(x_0) = q'_0 \hat{\beta} + \lambda'_0 (Z - q\hat{\beta}) \quad (3.194)$$

#### 4. KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİGİNG META-MODELİ

Bu tezde BE için kriging meta-modelinde kullanılan literatürde bilinen doğrusal ve karesel drift fonksiyonlu ÜK modellerine ek olarak yeni bir meta-model önerilmektedir. Girdi değişkenleri ile çıktı değişkenleri arasındaki ilişki her zaman doğrusal veya karesel drift fonksiyonları  $f(\mathbf{x})$ , ile tanımlanamayabilir. Bu durumlarda daha yüksek dereceli drift fonksiyonlarına ihtiyaç duyulabilir. Ancak yüksek dereceli fonksiyonlar ve girdi değişkenleri arasındaki etkileşim de göz önüne alındığında ÜK matrisinin boyutu çok artar.

Örneğin üç girdi değişkenli yani üç boyutlu ÜK için varyogram matrisi, doğrusal drift fonksiyonu için  $(n + 4)(n + 4)$  boyutlu, karesel drift fonksiyonu için  $(n + 10)(n + 10)$  boyutlu, kübik drift fonksiyonu için  $(n + 20)(n + 20)$  boyutlu olmaktadır. Önerilen kesirli üslü drift fonksiyonlu ÜK için varyogram matrisi  $(n + 4)(n + 4)$  boyutlu olmaktadır. Genel olarak  $k$  değişkenli bir problem için, önerilen kesirli üslü drift fonksiyonlu ÜK hesaplamalarında kullanılan varyogram, kovaryogram ve korelogram matrisleri  $(n + k + 1)(n + k + 1)$  boyutlu olmaktadır. Bu da kriging ağırlıklarının hesaplamasında büyük kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca drift fonksiyonunun kesirli dereceden değer alabilmesi de rassal benzetim çıktılarına uygun kriging meta-modelinin seçilmesinde esneklik sağlamaktadır. Drift fonksiyonunun kesirli dereceden değer alabilmesi, girdi değişkenlerinin pozitif değerli olması durumunda sorun olmamakta ancak negatif değerli olması durumun kodlanması gerekmektedir. Bu tezde önerilen kesirli dereceden üslü drift fonksiyonlu ÜK meta-modelin amacı benzetim modelinden çıktı üretmenin pahalı olduğu durumlarda, özellikle rassal benzetim modeli ile çalışıldığında en uygun kriging meta-modelinin elde edilmesini sağlamaktır.

Önerilen kesirli dereceden üslü drift fonksiyonlu ÜK modeli, tezde kısaca “**Kesirli ÜK (KÜK)**” modeli olarak adlandırılmıştır.

$Z(\mathbf{x})$  için varsayılan model, (4.1), (4.2) ve 4.3) numaralı eşitlikler ile gösterilmiştir.

$$Z(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}) \quad (4.1)$$

$$E[\varepsilon(\mathbf{x})] = 0 \quad (4.2)$$

$$\mu(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^b \beta_j f_j(\mathbf{x}) \text{ ve } f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_b(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D \quad (4.3)$$

$f_j(\mathbf{x})$   $\mathbf{x}$ 'e bağılı drift fonksiyonudur.

En iyi yansız doğrusal tahmin edici (4.4) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_i^n \lambda_i Z(x_i) \quad (4.4)$$

$$\sum_i^n \lambda_i = 1 \quad (4.5)$$

Kesirli dereceden üslü drift fonksiyonu için (4.6) numaralı eşitlik önerilmiştir.

$$\mu(x_i) = \sum_{j=1}^3 \beta_j x_{ij}^p \text{ her } i \text{ için ve } 0 < p \leq P \quad (4.6)$$

P'nin büyüklüğü meta-modelin geçerliliğinin araştırılması aşamasında kesinleştirilir. Kriging modelleri için kullanılacak Öklid uzaklığı, k sayıda girdi değişkeni için,

$h(x_i, x_j) = \sqrt{\sum_{k=1}^k (x_{ik} - x_{jk})^2}$  olarak hesaplanır. Burada,  $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{ik})$  konum vektörünü göstermektedir.

İki değişkenli bir problemin varyograma dayalı KÜK meta-modeli için hesaplama yöntemi aşağıdaki gibidir.

$$\Gamma_u = \begin{vmatrix} \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) & x_{11}^p & x_{12}^p & 1 \\ \gamma(x_2 - x_1) & \gamma(x_2 - x_2) & \dots & \gamma(x_2 - x_n) & x_{21}^p & x_{22}^p & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \gamma(x_n - x_n) & x_{n1}^p & x_{n2}^p & 1 \\ x_{11}^p & x_{21}^p & \dots & x_{n1}^p & 0 & 0 & 0 \\ x_{12}^p & x_{22}^p & \dots & x_{n2}^p & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.7)$$

$x_{ij}^p$ : i.gözlem noktasındaki j. girdi değişkenin p. dereceden değerini göstermektedir.

$$Y_u = (\gamma(x_1 - x_0), \gamma(x_2 - x_0), \gamma(x_3 - x_0), \dots, \gamma(x_n - x_0), x_{01}^p, x_{02}^p, 1)' \quad (4.8)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m_1, m_2, m_0)' \quad (4.9)$$

$$\lambda_u = \Gamma_u^{-1} Y_u \quad (4.10)$$

$x_0 = (x_{01}, x_{02})$  tahmin noktası için KÜK tahmin edici (4.12) numaralı eşitlikte gösterildiği gibidir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (4.11)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (4.12)$$

KÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  aşağıdaki (4.13) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) + m_0 + \sum_{j=1}^2 m_j x_j(x_0) \quad (4.13)$$

Genel olarak k değişkenli bir problem için varyograma dayalı KÜK için hesaplama yöntemi aşağıdaki (4.14), (4.15), (4.16) ve (4.17) numaralı eşitlikler ile gösterilmektedir.

$$\Gamma_u = \begin{array}{c|cccccccc} & \gamma(x_1 - x_1) & \gamma(x_1 - x_2) & \dots & \gamma(x_1 - x_n) & x_{11}^p & \dots & x_{1k}^p & 1 \\ & \gamma(x_2 - x_1) & \gamma(x_2 - x_2) & \dots & \gamma(x_2 - x_n) & x_{21}^p & \dots & x_{2k}^p & 1 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & \gamma(x_n - x_1) & \gamma(x_n - x_2) & \dots & \gamma(x_n - x_n) & x_{n1}^p & \dots & x_{nk}^p & 1 \\ \Gamma_u = & x_{11}^p & x_{21}^p & \dots & x_{n1}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & x_{1k}^p & x_{2k}^p & \dots & x_{nk}^p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (4.14)$$

$$Y_u = (\gamma(x_1 - x_0), \gamma(x_2 - x_0), \dots, \gamma(x_n - x_0), x_{01}^p, \dots, x_{0k}^p, 1) \quad (4.15)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m_1, \dots, m_k, m_0) \quad (4.16)$$



$$\lambda_u = \Gamma_u^{-1} \gamma_u \quad (4.17)$$

Tahmin noktası  $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0k})$  için KÜK tahmin edici (4.19) numaralı eşitlikte verildiği gibidir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (4.18)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (4.19)$$

KÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(s_0)$  (4.20) numaralı eşitlikte verilmiştir.

$$\sigma^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i - x_0) + m_0 + \sum_{j=1}^k m_j x_j(x_0) \quad (4.20)$$

#### 4.1. Kovaryans Fonksiyonuna Dayalı Kesirli Üiversal Kriging

Varyogram ve kovaryogram ilişkisinden dolayı 3.4.1. bölümünde açıklandığı üzere, KÜK eşitlikleri aşağıda (4.21), (4.22), (4.23) ve (4.24) numaralı eşitlikler ile verildiği gibi kovaryansa dayalı olarak hesaplanabilir.

$$\Sigma_u = \begin{pmatrix} c(x_1 - x_1) & c(x_1 - x_2) & \dots & c(x_1 - x_n) & x_{11}^p & \dots & x_{1k}^p & 1 \\ c(x_2 - x_1) & c(x_2 - x_2) & \dots & c(x_2 - x_n) & x_{21}^p & \dots & x_{2k}^p & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c(x_n - x_1) & c(x_n - x_2) & \dots & c(x_n - x_n) & x_{n1}^p & \dots & x_{nk}^p & 1 \\ x_{11}^p & x_{21}^p & \dots & x_{n1}^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{1k}^p & x_{2k}^p & \dots & x_{nk}^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

$$c_u = (c(x_1 - x_0), c(x_2 - x_0), c(x_3 - x_0), \dots, c(x_n - x_0), x_{01}^p, \dots, x_{0k}^p, 1)' \quad (4.22)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m_1, \dots, m_k, m_0)' \quad (4.23)$$

$$\lambda_u = \Sigma_u^{-1} c_u \quad (4.24)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için KÜK tahmin edici (4.26) numaralı eşitlik ile verilmiştir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (4.25)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (4.26)$$

KÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  (4.27) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sigma^2 + \sum_{i=1}^n \lambda_i c(x_i - x_0) + m_0 + \sum_{j=1}^k m_j x_j(x_0) \quad (4.27)$$

## 4.2. Korelogram Fonksiyonuna Dayalı Kesirli Ünsersal Kriging

Korelogram ve kovaryogam ilişkisinden dolayı 3.4.2. bölümde açıklandığı üzere, KÜK eşitlikleri aşağıda (4.28), (4.29), (4.30) ve (4.31) numaralı eşitlikler ile verildiği gibi korelograma dayalı olarak hesaplanabilir. BE ve benzetim deneylerinin incelenmesinde meta-model oluşturulurken genelde korelogram kullanılmıştır

$$R_u = \begin{pmatrix} 1 & r(x_1 - x_2) & \dots & r(x_1 - x_n) & x_{11}^p & \dots & x_{1k}^p & 1 \\ r(x_2 - x_1) & 1 & \dots & r(x_2 - x_n) & x_{21}^p & \dots & x_{2k}^p & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r(x_n - x_1) & r(x_n - x_2) & \dots & 1 & x_{n1}^p & \dots & x_{nk}^p & 1 \\ x_{11}^p & x_{21}^p & \dots & x_{n1}^p & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x_{1k}^p & x_{2k}^p & \dots & x_{nk}^p & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$r_u = (r(x_1 - x_0), r(x_2 - x_0), r(x_3 - x_0), \dots, r(x_n - x_0), x_{01}^p, \dots, x_{0k}^p, 1)' \quad (4.29)$$

$$\lambda_u = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n, m_1/\sigma^2, \dots, m_k/\sigma^2, m_0/\sigma^2)' \quad (4.30)$$

$$\lambda_u = R_u^{-1} r_u \quad (4.31)$$

Tahmin noktası  $x_0$  için KÜK tahmin edici (4.33) numaralı eşitlikteki gibidir.

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)', \quad Z = (z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n))' \quad (4.32)$$

$$\hat{Z}(x_0) = \lambda' Z \quad (4.33)$$

KÜK tahmin varyansı  $\sigma^2(x_0)$  (4.34) numaralı eşitlik ile hesaplanır.

$$\sigma^2(x_0) = \sigma^2 [1 + \sum_{i=1}^n \lambda_i r(x_i - x_0)] + m_0 + \sum_{j=1}^k m_j x_j(x_0) \quad (4.34)$$

## 5. KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİGING META-MODELİNİN GELİŞTİRİLMESİ

Tezin bu bölümünde, ÜK meta-modelinin daha düşük dereceli drift fonksiyonlarının tahminde yetersiz kaldığı ve benzetim modelinden çıktı üretmenin pahalı olduğu özellikle rassal benzetim modelleri için en uygun kriging meta-modeli geliştirilerek önerilmektedir. Önerilen KÜK meta-modeli literatürden seçilen Adjiman, Deckkers-Aarts, Altı hörgüçlü deve sırtı, 2 boyutlu Styblinski–Tang, Zettl, Shubert, 3 boyutlu Styblinski–Tang, Michaelwicz, Rosenbrock, Schwefel, Isigami ve Perm fonksiyonlarından oluşan 12 adet 2 ve 3 boyutlu (girdi değişken sayısı 2 ve 3 olan) test fonksiyonları (TF) için kurulmuştur.

Detaylı uygulama adımları Şekil 2.6'da verilen akış uyarınca aşağıda açıklanmaktadır.

- i. LHT kullanılarak, meta-model kurmak ve geçerlilik için farklı iki veri seti elde edilir.
- ii. Veri setine ait çıktı değerleri benzetim modeli ile (TF için fonksiyon değerleri) üretilir.
- iii. Veri setine uygun teorik varyogram/korelogram modeli bulunur.
- iv. OK, ÜK ve KÜK meta-modelleri kurulur. KÜK meta-modelinde drift fonksiyonun derecesini belirlemek için farklı değerlere göre farklı tahmin katsayıları ürettiğinden farklı bir model gibi işlemler tekrar edilmiştir.
- v. Meta-modelin geçerliliği için 2. veri seti kullanılır. Bu çalışmada küçük, orta ve büyük olmak üzere üç ayrı veri seti model geçerliliğinde kullanılmıştır.
- vi. OHK ve EHK başarımlar ölçütleri değerlendirilerek uygun meta-model seçilir.

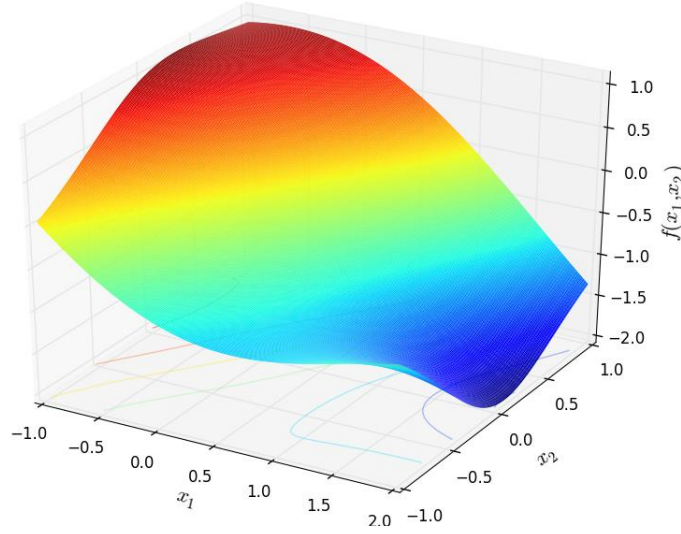
### 5.1 Adjiman Fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Adjiman fonksiyonuna ait eniyileme problemi aşağıda (5.1) ve (5.2) numaralı eşitliklerde verilmiş olup genel çözümü  $f^*(2; 0,10578) = -2,02181$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = \cos(x_1)\sin(x_2) - \frac{x_1}{(x_2^2+1)} \quad (5.1)$$

$$-1 \leq x_1 \leq 2, -1 \leq x_2 \leq 1 \quad (5.2)$$

Adjiman fonksiyonunun yüzey gösterimi Şekil 5.1 'de görülmektedir.



Şekil 5.1 Adjiman fonksiyonunun yüzey gösterimi

Adjiman fonksiyonu birçok yerel ancak bir genel en küçük çözüme sahiptir.

### 5.1.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

LHT ile elde edilen 26 deney noktası için rassal sıralama Çizelge 5.1 ile verilmiştir. D1, D2 kolonları girdi değişkenlerinin düzeylerinin rassal sıralamasını,  $x_1$ ,  $x_2$  kolonları girdi değişkenlerinin değerlerini,  $Z(x)$  ise  $f(x)$  fonksiyonundan elde edilen çıktı değişkeninin değerlerini göstermektedir. Burada  $X = (x_1, x_2)$  girdi değişkenleri vektörünü göstermektedir.

Çizelge 5.1 Adjiman fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			$x_1$	$x_2$	
1	6	2	-0,4	-0,92	-0,51616
2	7	1	-0,28	-1	-0,66870
3	4	18	-0,64	0,36	0,84913
4	15	26	0,68	1	0,31431
5	25	13	1,88	-0,04	-1,86483
6	12	7	0,32	-0,52	-0,72355
7	2	21	-0,88	0,6	1,00682
8	14	15	0,56	0,12	-0,45062
9	26	11	2	-0,2	-1,84040
10	24	8	1,76	-0,44	-1,39442
11	3	17	-0,76	0,28	0,90506
12	13	10	0,44	-0,28	-0,65805
13	20	3	1,28	-0,84	-0,96397
14	16	14	0,8	0,04	-0,77086
15	10	25	0,08	0,92	0,74973

Çizelge 5.1 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	
16	5	6	-0,52	-0,6	-0,10766
17	18	16	1,04	0,2	-0,89943
18	8	12	-0,16	-0,12	0,03955
19	11	23	0,2	0,76	0,54841
20	19	4	1,16	-0,76	-1,01041
21	23	24	1,64	0,84	-1,01303
22	17	19	0,92	0,44	-0,51274
23	21	5	1,4	-0,68	-1,06420
24	9	9	-0,04	-0,36	-0,31658
25	22	20	1,52	0,52	-1,17124
26	1	22	-1	0,68	1,02355

### 5.1.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak Eşitlik 5.3'te verilen üçüncü derceden üstel korelogram modelinin Adjiman fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılr.

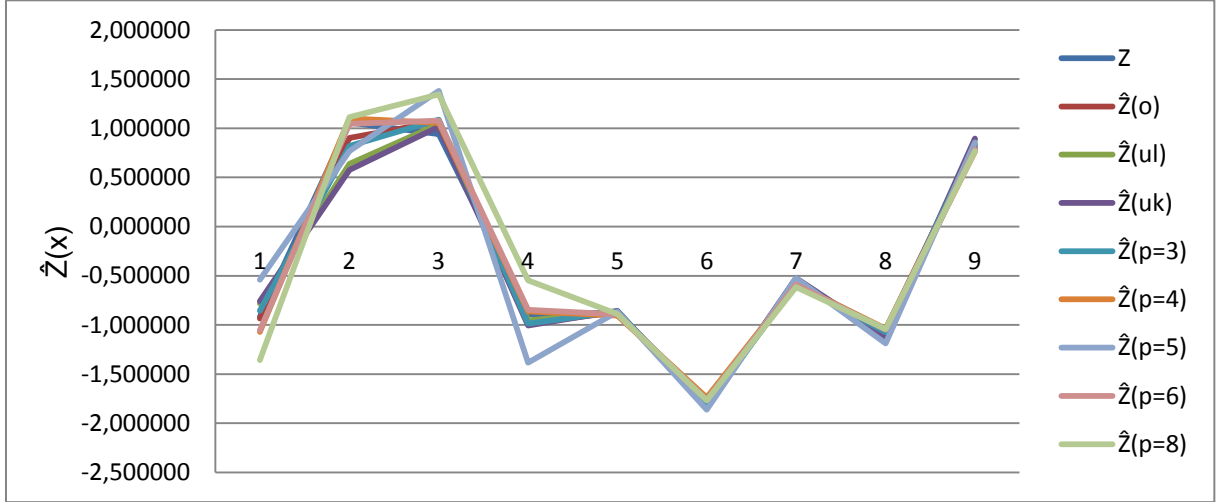
$$r(h) = \exp\left(-\left(\frac{h}{1,72}\right)^3\right) \quad (5.3)$$

### 5.1.3 Kesirli Üniversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

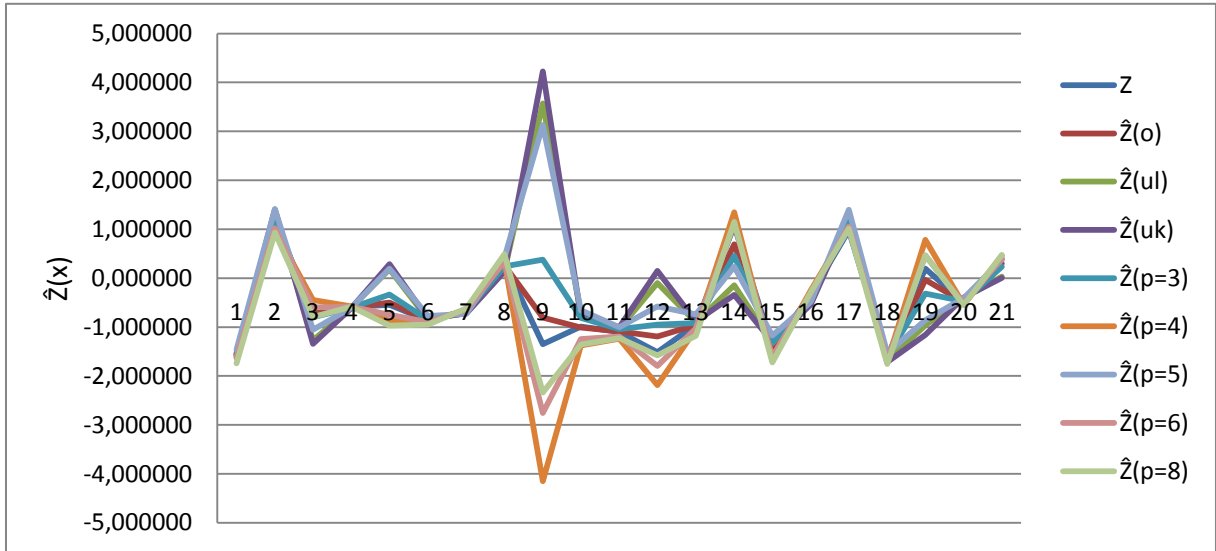
Kriging meta-modelleri en iyi yansız doğrusal tahmin edicidir. OK, ÜK ve KÜK meta-modellerinin geçerliği 9, 21 ve 41 deneyden oluşan, model kurarken kullanılan verilerden bağımsız olarak elde edilen, üç farklı veri seti üzerinde değerlendirilmiştir. Başarım ölçütü olarak OHK ve EHK dikkate alınmıştır. Sonuçlar Çizelge 5.3'te verilmektedir. Amaç üç farklı veri seti üzerinde başarım ölçütleri açısından en uygun meta-modelin KÜK meta-modeli olduğunu ve veri setinin boyutunun başarım ölçütü üzerindeki etkisini göstermektir.  $\hat{Z}(\mathbf{x})$  model geçerliliği noktaları için tahmin değerlerini göstermektedir. Burada,  $\hat{Z}(\mathbf{x}) = (\hat{Z}(x_1), \hat{Z}(x_2), \dots, \hat{Z}(x_{nv}))$ ,  $nv$  ise model geçerliliğinde kullanılan veri seti büyüklüğüdür. Önerilen KÜK meta-modelinde kullanılan kesirli üslü drift fonksiyonu Eşitlik 4.3'te verilmektedir. Model geçerliliği ile ilgili çalışmalarda kriging model türleri, drift fonksiyonu türleri ve kriging meta-modellerinin tahminleri  $\hat{Z}(\mathbf{x})$ , Çizelge 5.2' de verildiği gibi kullanılmıştır.

Çizelge 5.2 Kriging meta-modelleri için kullanılan notasyon

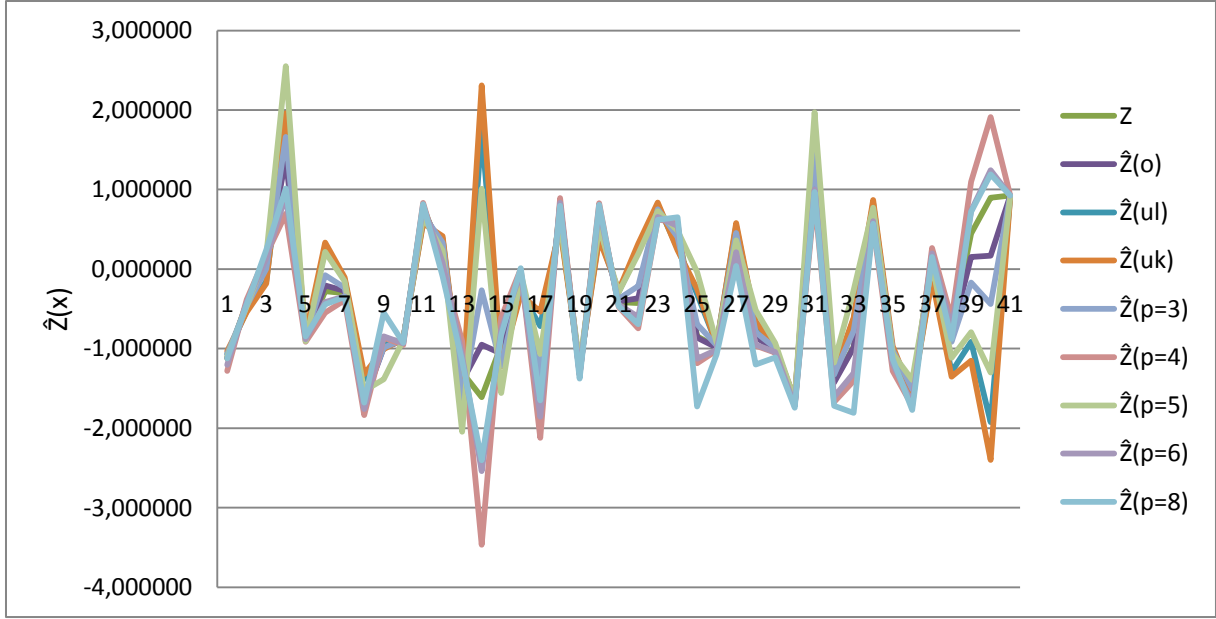
Model	Drift fonksiyonu	Meta-Modellerinin tahminleri
OK	Sabit	$\hat{Z}(o)$
ÜK	Doğrusal	$\hat{Z}(ukl)$
ÜK	Karesel	$\hat{Z}(ukk)$
KÜK	Kesirli üslü	$\hat{Z}(p=...)$



Şekil 5.2 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=9)



Şekil 5.3 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.4 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahmin grafikleri Şekil 5.2, 5.3 ve 5.4 'te görülmektedir.

Grafikler incelendiğinde KÜK ve OK meta-modellerinin daha iyi olduğu görsel olarak söylenebilse de hangi meta-modelin daha uygun olduğunun kararını vermek zordur. Bu nedenle meta-model seçiminde modellerin geçerliliğinin değerlendirilmesi gerekir.

#### 5.1.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

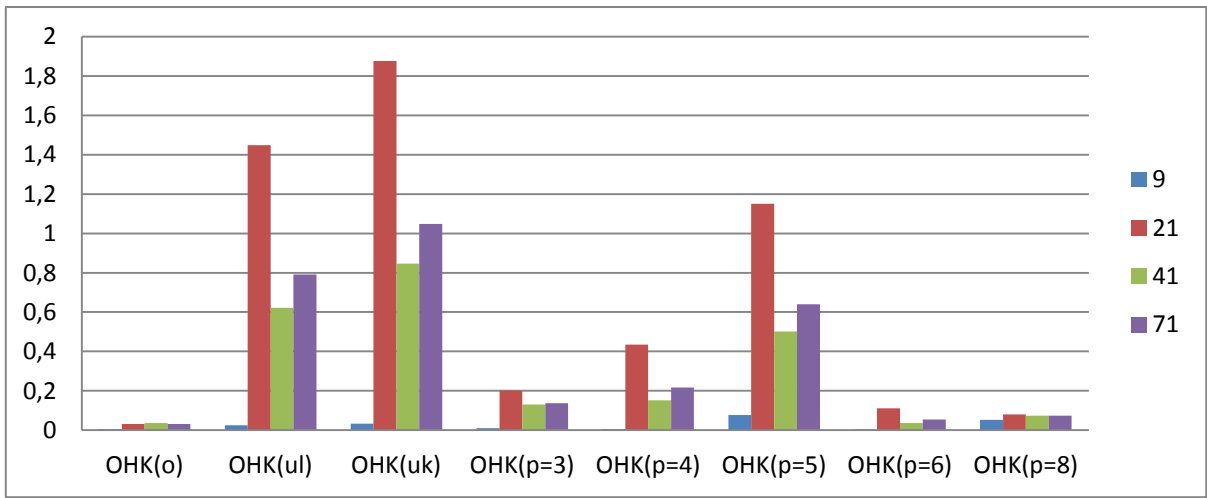
Çizelge 5.3'te görüldüğü gibi OK, ÜK ve KÜK meta-modelleri OHK ve EHK başarımları ölçütleriyle değerlendirilmiştir. Bu inceleme sonucunda kesirli üslü drift fonksiyonunun bu tezde önerilen KÜK meta-modeli üzerindeki etkisi göstermektedir.

Meta-modellerin genel başarımları OHK ve EHK gibi standart geçerlilik ölçütleriyle değerlendirilir. Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri setleri (nv=9, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.3'te verilmiştir. Son sütunda ise üç veri seti birlikte tek bir veri seti olarak dikkate alınmış (nv=71) ve sonuçlar verilmiştir.

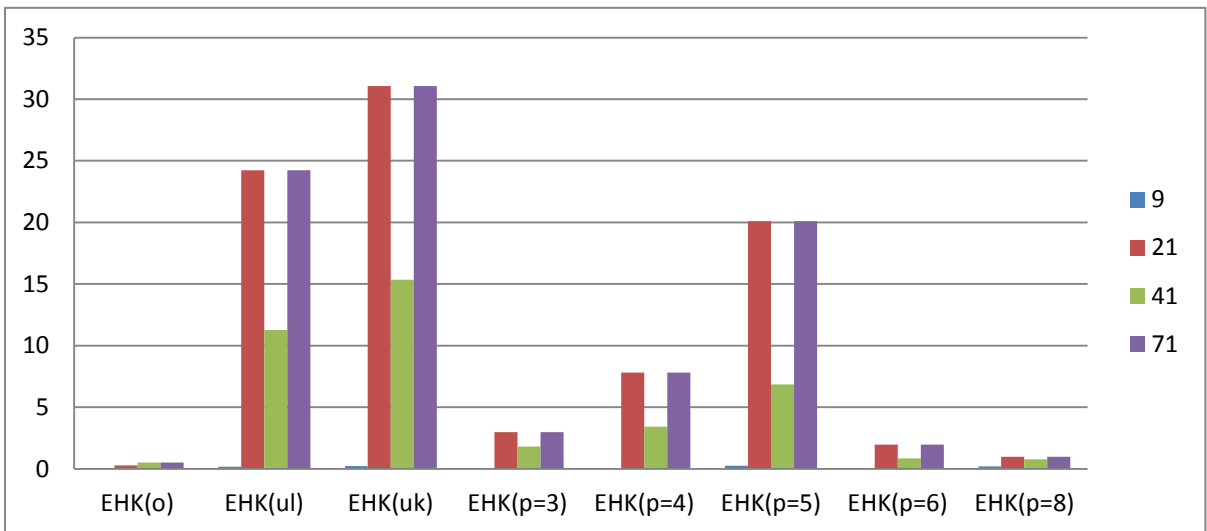


Çizelge 5.3 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modelleri

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
OK	sabit		0,006	<b>0,032</b>	<b>0,036</b>	<b>0,031</b>	0,025	<b>0,294</b>	<b>0,528</b>	<b>0,528</b>
ÜK	doğrusal		0,025	1,449	0,622	0,791	0,177	24,222	11,261	24,222
ÜK	karesel		0,033	1,876	0,846	1,047	0,234	31,078	15,353	31,078
KÜK	kesirli üslü	p=3	0,011	0,201	0,131	0,137	0,057	2,995	1,809	2,995
		p=4	<b>0,005</b>	0,435	0,152	0,217	0,024	7,826	3,436	7,826
		p=5	0,077	1,150	0,502	0,640	0,244	20,102	6,856	20,102
		p=6	<b>0,005</b>	0,111	0,037	0,055	<b>0,019</b>	1,980	0,861	1,980
		p=8	0,053	0,081	0,074	0,073	0,194	0,978	0,773	0,978



Şekil 5.5 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.6 Adjiman fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Model geçeliliğinde 9 deneyli (nv=9) veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere p=4, p=6, p=8. dereceden KÜK meta-modelleri ve OK meta-modelinin birbirine yakın oldukları görülmektedir. Diğer yandan EHK dikkate alındığında, aralarında önemli bir fark olmamasına rağmen p=6. dereceden KÜK meta-modeli ile daha iyi sonuçların elde edildiği görülmektedir.

Benzer şekilde, 21 deneyli (nv=21) veri seti dikkate alındığında OK meta-modeli, 41 deneyli (nv=41) veri seti dikkate alındığında OK meta-modeli daha iyi sonuç vermektedir.

Tüm veri setlerinin birleştirildiği durum (nv=71) dikkate alınırsa OK meta-modelinin en düşük tahmin hatasını verdiği görülmektedir.

Bu karar tahmin başarımında dikkate alınan başarım ölçütüne göre verilir. Genellikle karmaşık sistemlerin rassal benzetim modelleri ile deney yapmak maliyetli olduğundan dolayı az sayıda deney yaparak sonuçları tahmin etmek BE konusunda çalışanların ilgilendiği bir alandır. Bu amaçla deney tasarımı konusundan yararlanılarak az sayıda deney ile meta-model kurulması bu alanda önemli bir konudur. Çizelge 5.3'te gösterilen denemeler sonucunda 9 deneyli (nv=9) veri seti ile yapılan geçerlilik testi sonucunda p= 6. dereceden KÜK meta-modelinin Adjiman fonksiyonu için uygun bir meta-model olarak kullanılabileceği sonucuna varılır.

Adjiman fonksiyonu için ,  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^6$  KÜK meta-modeli olarak seçilir.

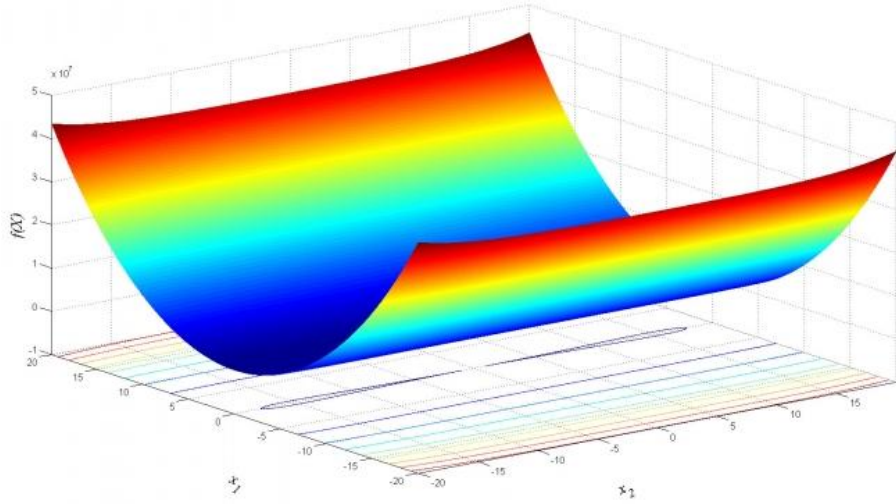
## 5.2 Deckkers-AartsFonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Deckkers-Aarts fonksiyonuna ait eniyileme problemi Eşitlik 5.4 ve Eşitlik 5.5 numaralı eşitliklerde verilmiş olup genel çözümü  $f^*(0; \pm 15) = -0,24771094$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = 10^{-5}(10^5 x_1^2 + x_2^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 + 10^{-5}(x_1^2 + x_2^2)^4) \quad (5.4)$$

$$-20 \leq x_1 \leq 20, -20 \leq x_2 \leq 20 \quad (5.5)$$

Deckkers-Aarts fonksiyonunun yüzey gösterimi Şekil 5.7'de görülmektedir.



Şekil 5.7 Deckkers-Aarts fonksiyonunun yüzey gösterimi

Deckkers-Aarts fonksiyonu birçok yerel ve iki genel en küçük çözüme sahiptir.

### 5.2.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.4 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.4 Deckkers-Aarts fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
1	14	20	0,8	10,4	0,53672
2	24	25	16,8	18,4	293,242
3	26	15	20	2,4	401,064
4	11	2	-4	-18,4	16,3266
5	8	11	-8,8	-4	77,3605
6	22	13	13,6	-0,8	184,734
7	20	8	10,4	-8,8	107,935
8	2	5	-18,4	-13,6	343,333
9	6	19	-12	8,8	143,751
10	12	26	-2,4	20	6,82826
11	17	17	5,6	5,6	31,3225
12	19	6	8,8	-12	77,1915
13	15	21	2,4	12	5,58746
14	25	7	18,4	-10,4	340,548
15	4	9	-15,2	-7,2	230,881
16	13	14	-0,8	0,8	0,63999
17	21	24	12	16,8	145,487
18	5	22	-13,6	13,6	185,466
19	23	1	15,2	-20	242,919
20	18	18	7,2	7,2	51,7446

Çizelge 5.4 devam ediyor

Deneý Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
21	10	3	-5,6	-16,8	31,3465
22	16	10	4	-5,6	15,9784
23	7	12	-10,4	-2,4	108,047
24	9	16	-7,2	4	51,7963
25	3	4	-16,8	-15,2	286,549
26	1	23	-20	15,2	411,877

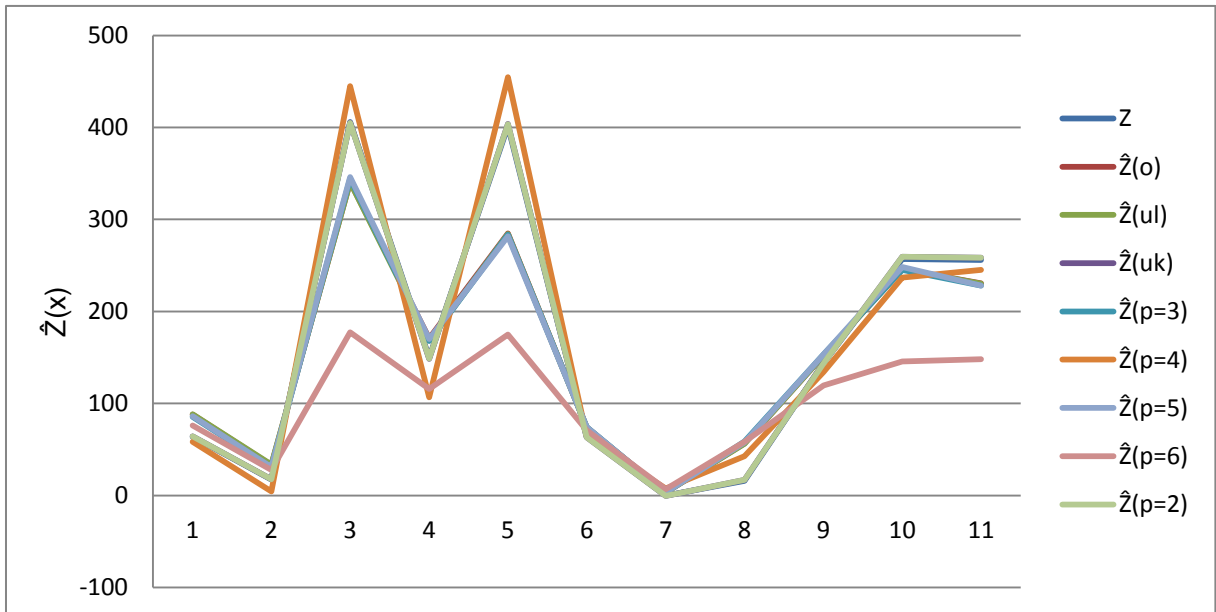
### 5.2.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.6) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Deckkers-Aarts fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

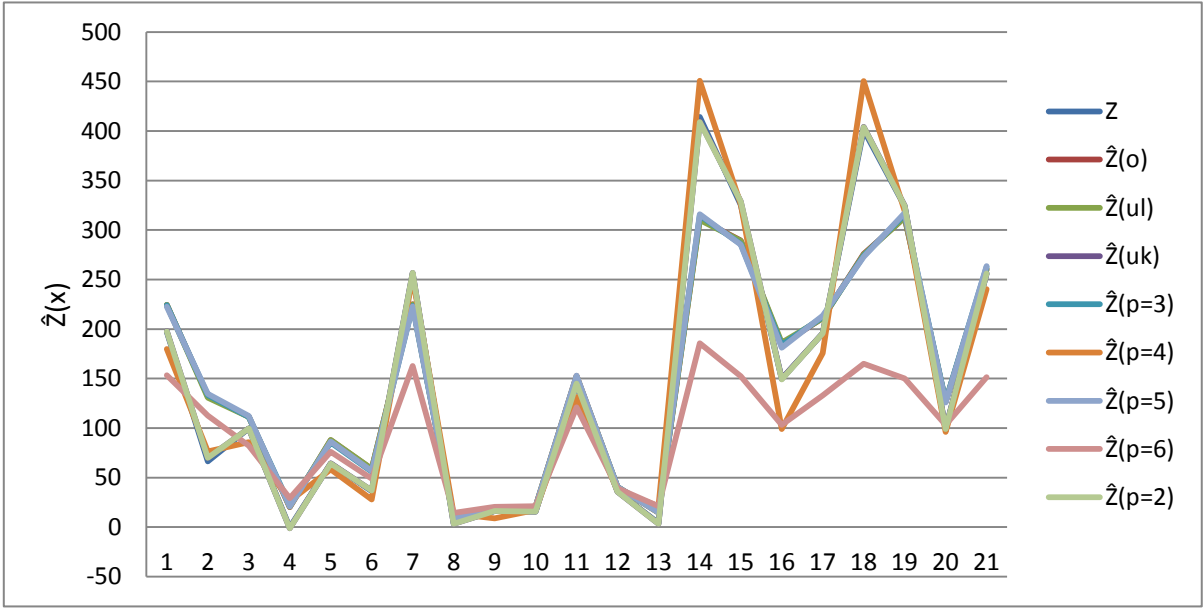
$$r(h) = \exp\left(-\frac{h}{28,77}\right) \quad (5.6)$$

### 5.2.3 Kesirli Üniversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

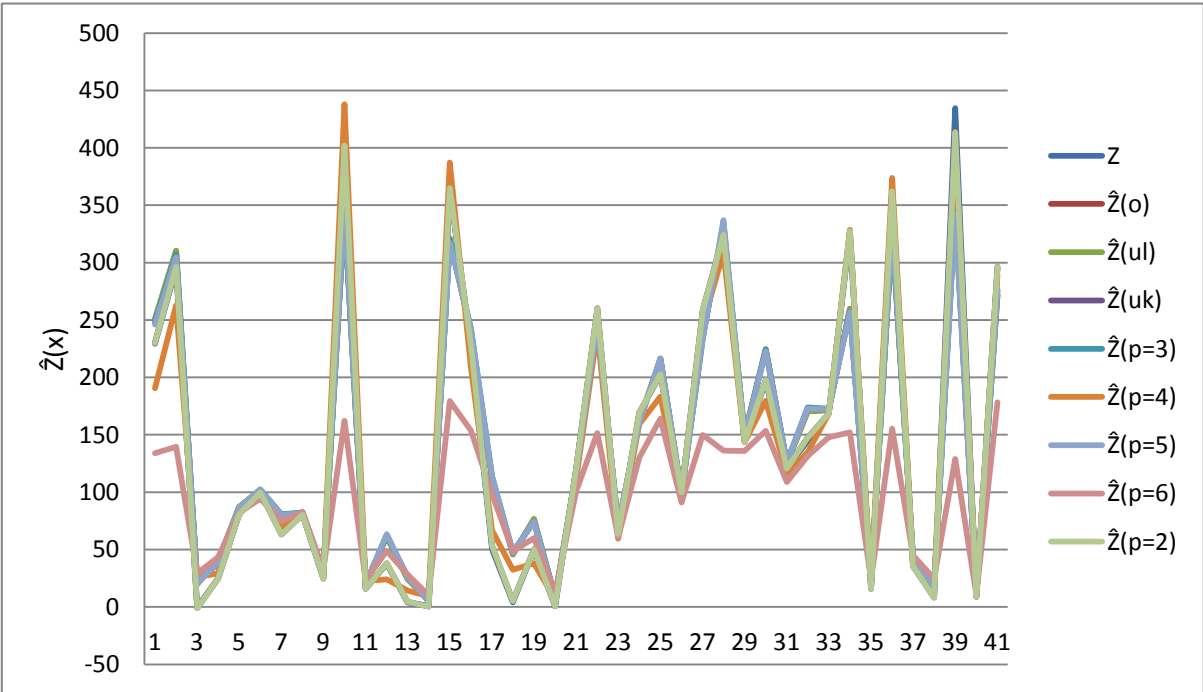
Deckkers-Aarts fonksiyonu için elde edilen Kriging meta-modellerinin geçerliliği 11, 21 ve 41 deneyden oluşan, model verilerinden bağımsız olarak LHT'ye göre elde edilen üç ayrı veri seti üzerinde incelenmiştir.



Şekil 5.8 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
(nv=11)



Şekil 5.9 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
(nv=21)



Şekil 5.10 Deckkers-Aarts fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
(nv=41)

Kriging meta-model tahmin grafikleri Şekil 5.8, 5.9 ve 5.10'da verilmektedir.

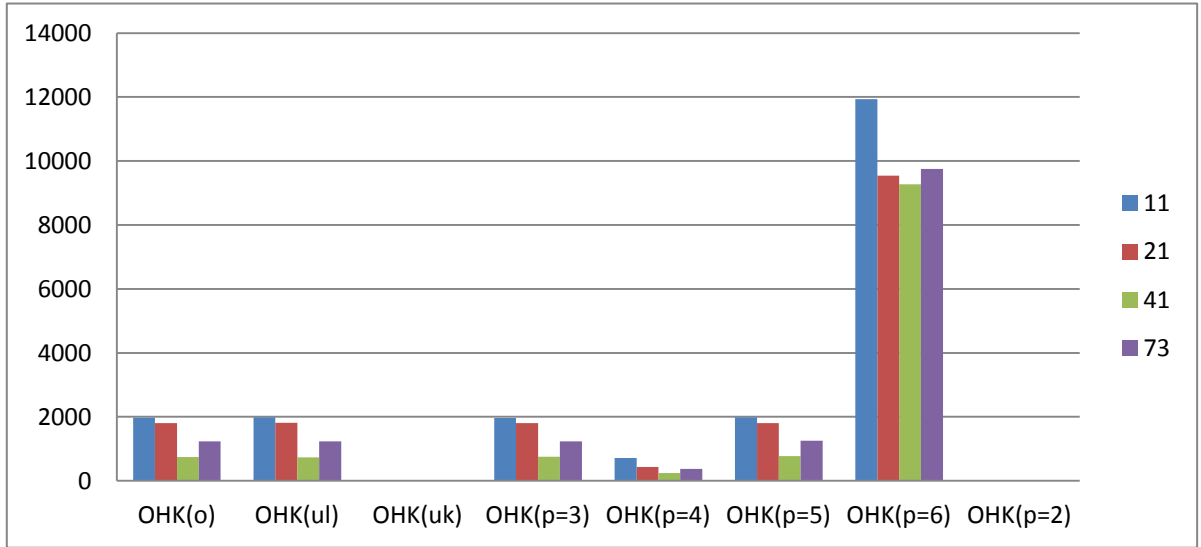
Grafikler incelendiğinde görsel olarak KÜK ve karesel drift fonksiyolu ÜK meta-modellerin daha uygun olduğu görülmektedir. Ancak uygun meta-model bölüm 5.2.4'te açıklandığı gibi seçilmiştir.

### 5.2.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

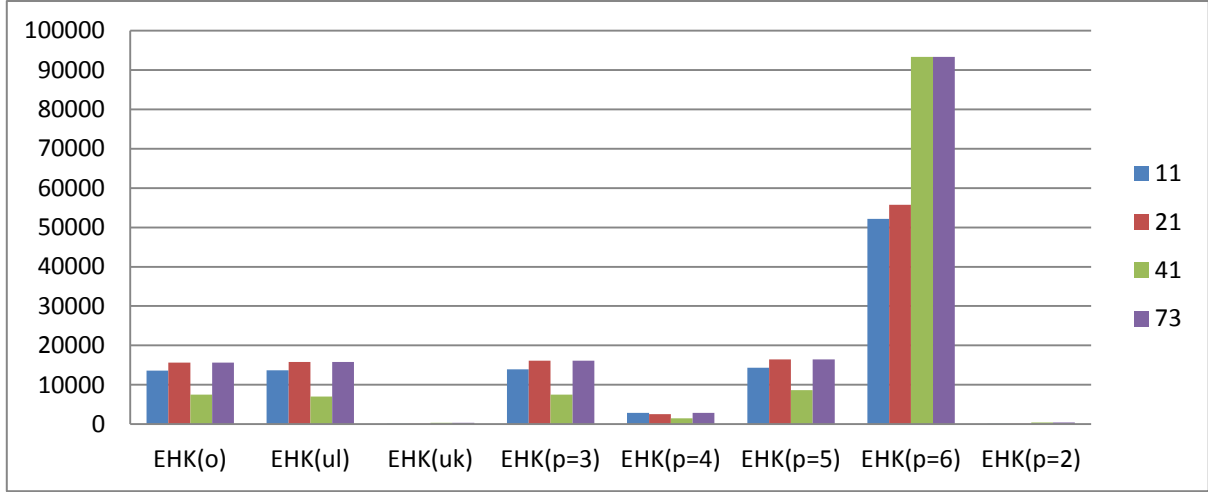
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti ( $nv=11$ ,  $nv=21$ ,  $nv=41$ ) için incelenmiştir. Başarım değerleri Çizelge 5.5'te verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte tek bir veri seti olarak dikkate alınmış ( $nv=73$ ) ve sonuçlar değerlendirilmiştir.

Çizelge 5.5 Deckerts-Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			$nv=11$	$nv=21$	$nv=41$	$nv=73$	$nv=11$	$nv=21$	$nv=41$	$nv=73$
OK	sabit		1970,0	1799,3	742,8	1231,6	13583	15640	7547	15640
ÜK	doğrusal		1980,5	1817,9	730,1	1231,5	13736	15791	7062	15791
ÜK	karesel		2,1	2,9	11,4	7,5	7	22	402	402
KÜK	kesirli üslü	p=2	1,9	3,0	12,1	8,0	6	27	439	439
		p=3	1967,0	1806,3	751,7	1238,2	13916	16121	7535	16121
		p=4	712,6	429,5	245,2	368,6	2845	2566	1502	2845
		p=5	1983,3	1807,0	772,9	1252,8	14317	16426	8679	16426
		p=6	11932,8	9542,9	9271,8	9750,8	13583	15640	7547	15640



Şekil 5.11 Deckerts - Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.12 Deckerts- Aarts fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Onbir deneyli ( $n_v=11$ ) veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli ve karesel drift fonksiyonlu ÜK birbirine yakın başarı göstermektedir. Diğer başarı ölçütü EHK dikkate alındığında ise karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modeli ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli arasında önemli bir fark olmadığı görülmektedir. Böylece meta-modellerden herhangi biri seçilebilir. Bu durumda OHK'ye göre en küçük değere sahip  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir.

Benzer şekilde, 21 ve 41 deneyli veri setleri için karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modeli ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli yaklaşık aynı sonuçları vermektedir. Tüm veri setlerinin birlikte ele alındığı ( $n_v=73$ ) durum için  $p=2$ . dereceden KÜK ve karesel drift fonksiyonlu universal kriging meta-modellerinin birbirine yakın başarı değerine sahip oldukları görülmektedir. EHK'ya göre karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modeli ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli arasında önemli bir fark olmadığı dolayısıyla bu iki modelden herhangi birinin seçilebileceği görülmektedir. OHK'ya göre ise  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir.

Öte yandan geçerlilik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 11 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artmasının ise sonucu değiştirmedeği görülmüştür. Sonuç olarak Deckerts-Aarts fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^2$  KÜK meta-modeli olarak seçilir.

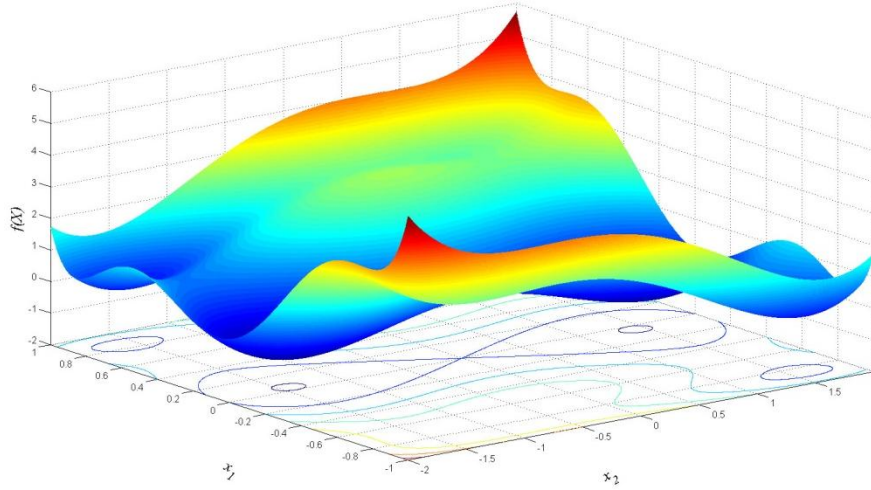
### 5.3 Altı Hörgüçlü Deve Sırtı Fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'tan alınan altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonuna ait eniyileme problemi aşağıda (5.7) ve (5.8) numaralı eşitliklerde verilmiş olup genel çözümü  $f^*(-0,0898; 0,7126) = f^*(0,0898; -0,7126) = -0,24771094$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = \left(4 - 2.1x_1^2 + \frac{1}{3}x_1^4\right)x_1^2 + x_1x_2 + (-4 + 4x_2^2)^2x_2^2 \quad (5.7)$$

$$-3 \leq x_1 \leq 3, -2 \leq x_2 \leq 2 \quad (5.8)$$

Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonunun yüzey gösterimi Şekil 5.13 ile görülmektedir.



Şekil 5.13 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonunun yüzey gösterimi

Altı hörgüçlü fonksiyonunun altı yerel en küçük çözümü vardır, bunların ikisi geneldir.

#### 5.3.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.6 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.6 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
1	6	2	-1,8	-1,84	37,8712
2	7	1	-1,56	-2	53,2216
3	4	18	-2,28	0,72	8,23038
4	15	26	0,36	2	49,2039



Çizelge 5.6 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
5	25	13	2,76	-0,08	55,71
6	12	7	-0,36	-1,04	1,21129
7	2	21	-2,76	1,2	55,1786
8	14	15	0,12	0,24	-0,131163
9	26	11	3	-0,4	107,162
10	24	8	2,52	-0,88	23,1627
11	3	17	-2,52	0,56	23,8069
12	13	10	-0,12	-0,56	-0,736655
13	20	3	1,56	-1,68	20,055
14	16	14	0,6	0,08	1,20596
15	10	25	-0,84	1,84	32,6551
16	5	6	-2,04	-1,2	9,28388
17	18	16	1,08	0,4	2,23193
18	8	12	-1,32	-0,24	2,45704
19	11	23	-0,6	1,52	12,3816
20	19	4	1,32	-1,52	12,4612
21	23	24	2,28	1,68	35,2752
22	17	19	0,84	0,88	1,93435
23	21	5	1,8	-1,36	6,09013
24	9	9	-1,08	-0,72	2,11649
25	22	20	2,04	1,04	6,77611
26	1	22	-3	1,36	111,106

### 5.3.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

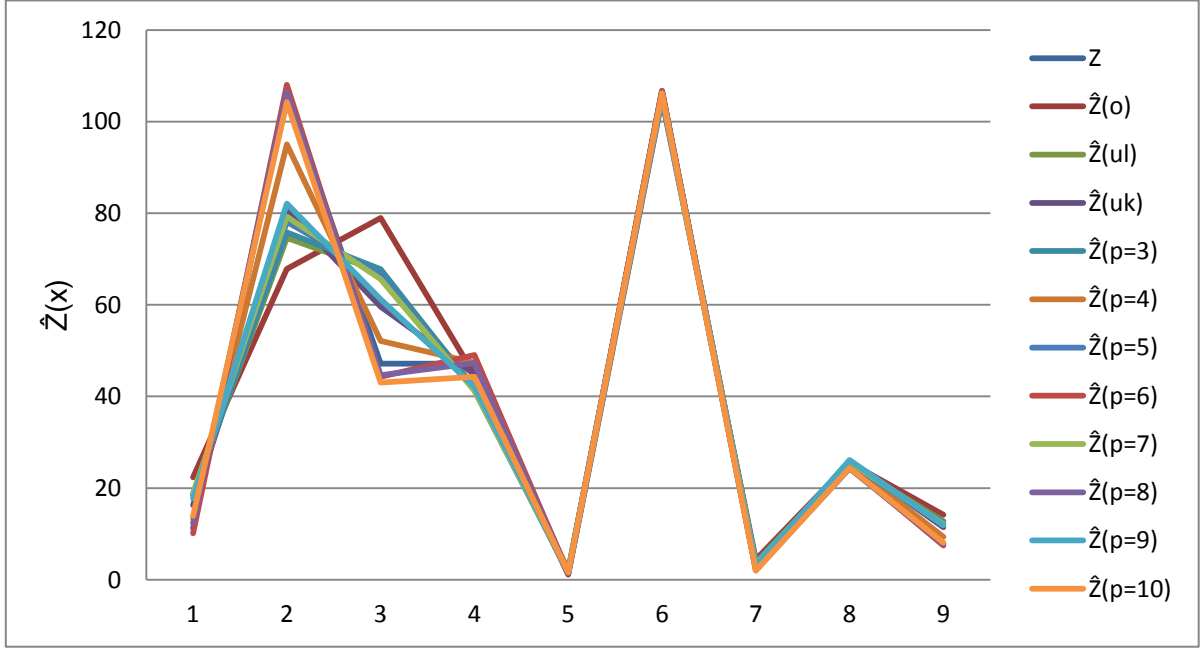
Verilere korelogram incelemesi yapılarak Eşitlik 5.9'da verilen Gaussyen (Gaussian) korelogram modelinin Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = \exp\left(-\left(\frac{h}{3,7}\right)^2\right) \quad (5.9)$$

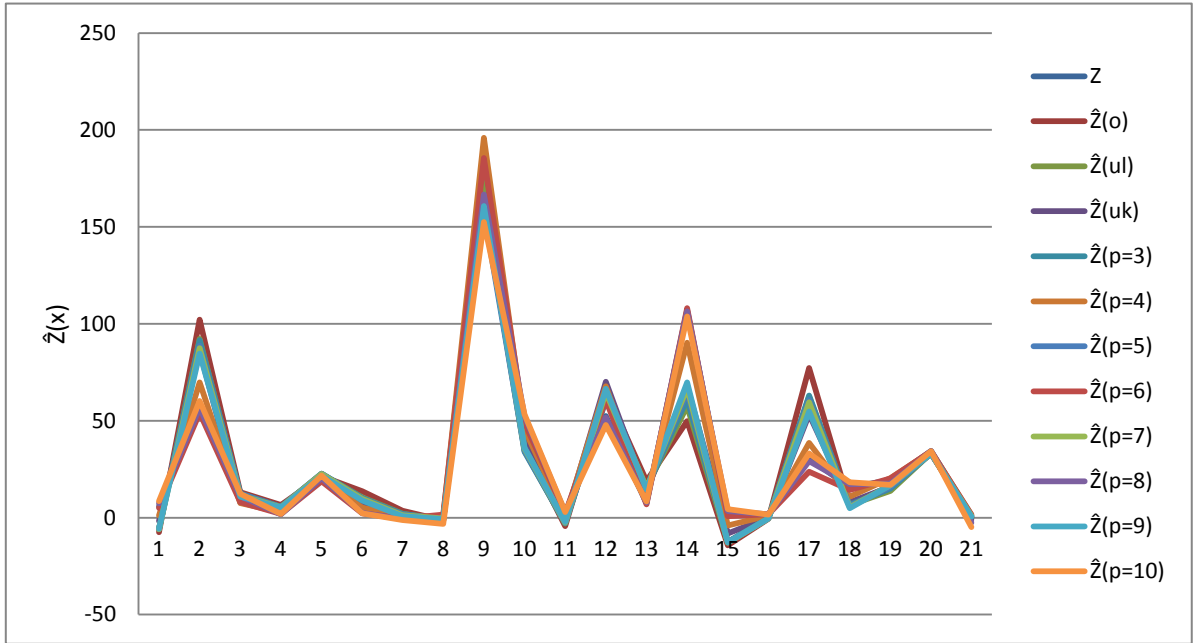
### 5.3.3 Kesirli Ünsersal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonunun Kriging meta-modellerinin geçerliliği 9, 21 ve 41 deneyden oluşan LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılarak gösterilmiştir. Geçerlilik için kullanılan veriler meta model kurulurken kullanılan verilerden bağımsız olarak elde edilmiştir.

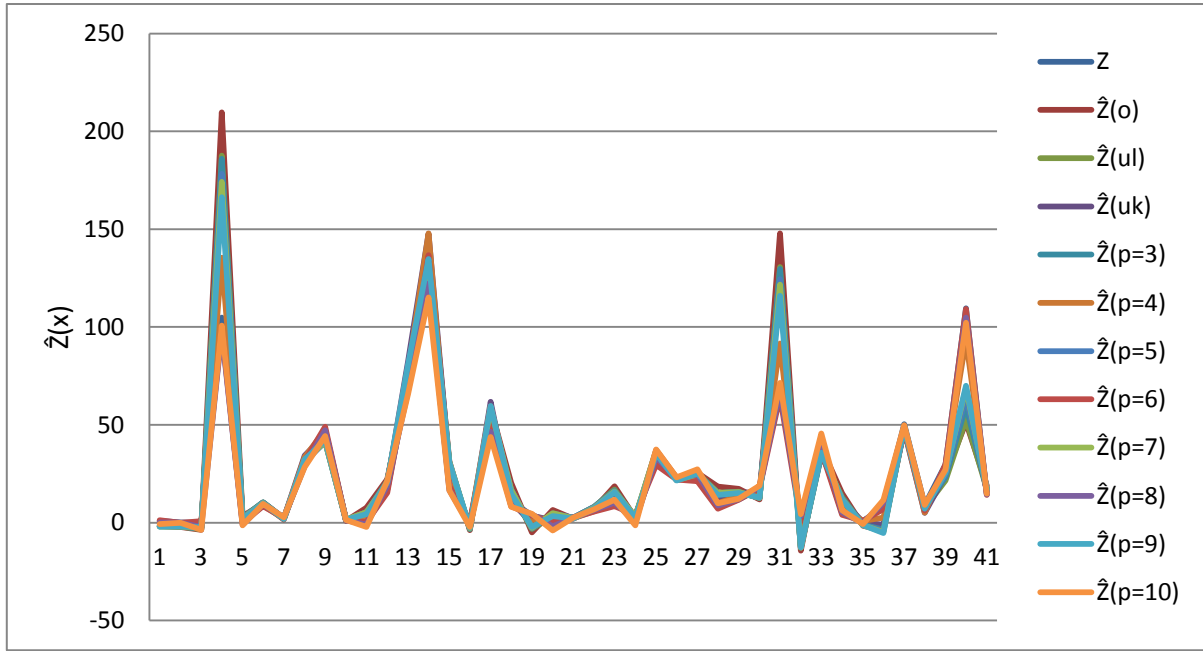
Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahmin grafikleri Şekil 5.14, 5.15 ve 5.16'de verilmektedir.



Şekil 5.14 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=9)



Şekil 5.15 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.16 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Grafikler incelendiğinde görsel olarak p=8. veya p=10. dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu görülmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.3.4'e göre yapılır.

### 5.3.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

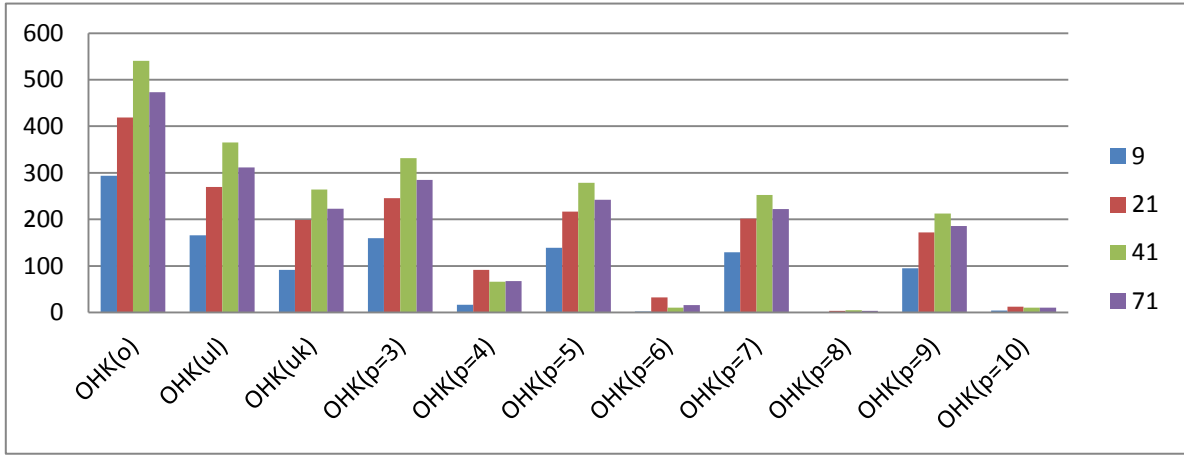
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=9, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. OHK ve EHK başarımların değerleri Çizelge 5.7'de verilmiştir. Son sütunda üç veri setinin birleşiminden oluşan veri seti dikkate alınarak (nv=71) elde edilen sonuçlar verilmektedir.

Çizelge 5.7 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

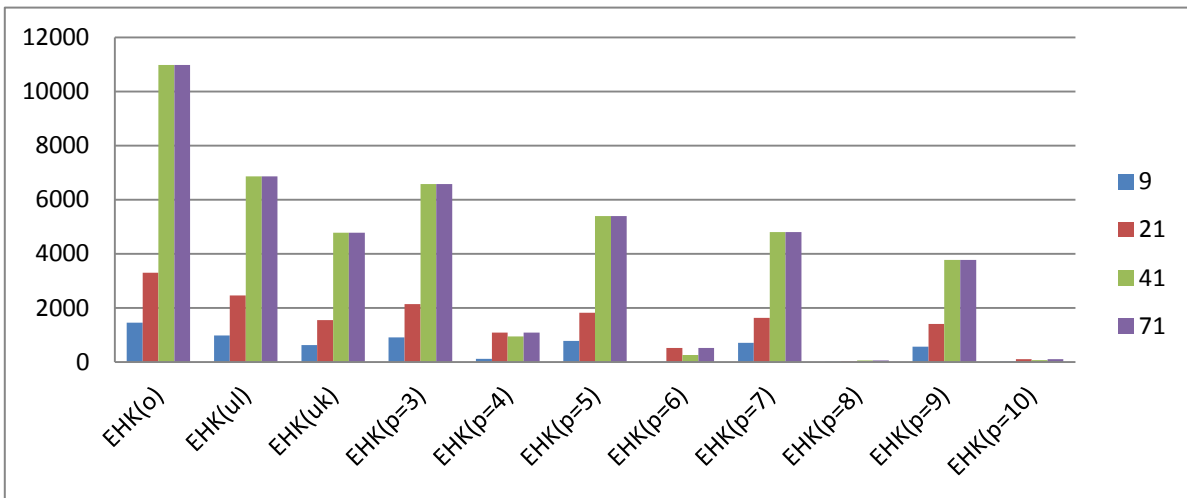
Model	Drift fonksiyonu	OHK				EHK			
		nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
OK	sabit	293,61	418,53	540,31	473,02	1450,09	3295,06	10980,32	10980,32
ÜK	doğrusal	165,75	269,91	365,08	311,66	978,90	2457,41	6857,83	6857,83
	karesel	91,62	199,10	263,81	222,84	623,97	1541,13	4776,88	4776,88

Çizelge 5.7 devam ediyor

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
KÜK	kesirli üslü	p=3	159,47	245,90	331,63	284,45	904,47	2134,39	6572,83	6572,83
		p=4	16,70	91,62	66,01	67,33	117,61	1088,01	938,50	1088,01
		p=5	138,99	216,66	278,42	242,48	772,25	1822,56	5387,85	5387,85
		p=6	1,96	32,11	10,33	15,71	8,18	515,88	260,76	515,88
		p=7	129,35	201,71	252,56	221,90	709,32	1627,01	4801,66	4801,66
		p=8	<b>0,92</b>	<b>3,27</b>	<b>4,68</b>	<b>3,78</b>	<b>6,33</b>	<b>18,48</b>	<b>54,61</b>	<b>54,61</b>
		p=9	94,97	171,84	212,59	185,63	568,15	1403,16	3771,56	3771,56
		p=10	3,91	12,27	10,36	10,11	16,75	107,97	62,42	107,97



Şekil 5.17 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.18 Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için elde edilen Kriging meta-modellerinin geçerliliği, veri seti büyüklüklerinin etkisini de görmek amacıyla, Şekil 5.17 ve Şekil 5.18'de görüldüğü gibi üç farklı veri seti üzerinde incelenmiştir. Bu şekillerden p=8. dereceden KÜK meta-modelinin OHK başarımlarının diğer meta-modellere göre çok küçük değer aldığı görülmektedir.

Diğer bir deyişle, sekizinci dereceden KÜK meta-modeli en küçük OHK ve EHK değerleri ile daha kaliteli tahmin yapabilecek bir meta-modeldir.

Öte yandan meta-model geçerlik işlemi için 9 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Böylece az sayıda deney ile hesaplama maliyeti de azalacaktır. Sonuç olarak altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^8$  KÜK meta-modeli olarak seçilir.

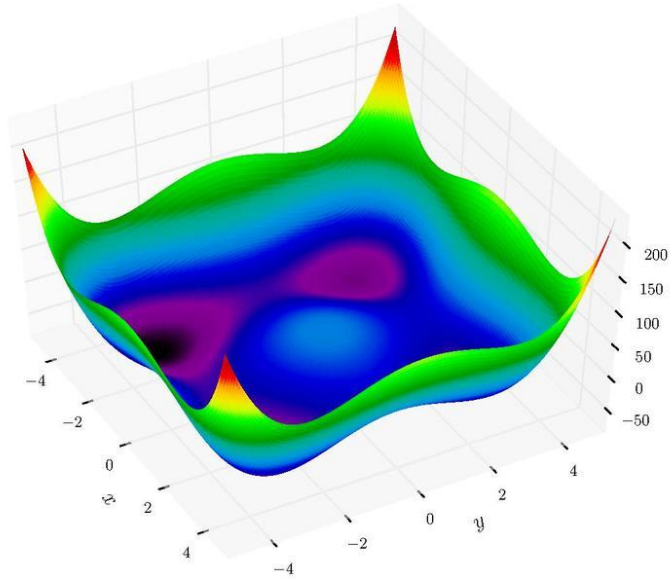
#### 5.4 Styblinski–Tang fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Styblinski–Tang fonksiyonuna ait eniyileme problemi aşağıda (5.10) ve (5.11) numaralı eşitliklerde verilmektedir. Problemin genel çözümü  $f^*(-2,903534; -2,903534) = -78,33198$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i \quad (5.10)$$

$$-5 \leq x_1 \leq 5, -5 \leq x_2 \leq 5 \quad (5.11)$$

Styblinski–Tang fonksiyonunun yüzey fonksiyonu gösterimi Şekil 5.19 'da görülmektedir.



Şekil 5.19 Styblinski–Tang fonksiyonunun yüzey gösterimi

Styblinski-Tang fonksiyonu birçok yerel ancak bir genel en küçük çözüme sahiptir.

#### 5.4.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.8 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.8 Styblinski–Tang fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
1	6	2	-3	-4,6	4,0928
2	7	1	-2,6	-5	62,2688
3	4	18	-3,8	1,8	-36,9344
4	15	26	0,6	5	123,685
5	25	13	4,6	-0,2	65,2736
6	12	7	-0,6	-2,6	-42,0464
7	2	21	-4,6	3	19,0928
8	14	15	0,2	0,6	-1,1344
9	26	11	5	-1	115
10	24	8	4,2	-2,2	-7,5424
11	3	17	-4,2	1,4	-6,2944
12	13	10	-0,2	-1,4	-18,0784
13	20	3	2,6	-4,2	-20,7664
14	16	14	1	0,2	-4,8192
15	10	25	-1,4	4,6	48,8336
16	5	6	-3,4	-3	-73,1632
17	18	16	1,8	1	-21,1712
18	8	12	-2,2	-0,6	-36,8224

Çizelge 5.8 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
19	11	23	-1	3,8	-11,7632
20	19	4	2,2	-3,8	-42,2704
21	23	24	3,8	4,2	23,2016
22	17	19	1,4	2,2	-31,7664
23	21	5	3	-3,4	-58,1632
24	9	9	-1,8	-1,8	-50,3424
25	22	20	3,4	2,6	-41,8944
26	1	22	-5	3,4	82,8368

#### 5.4.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

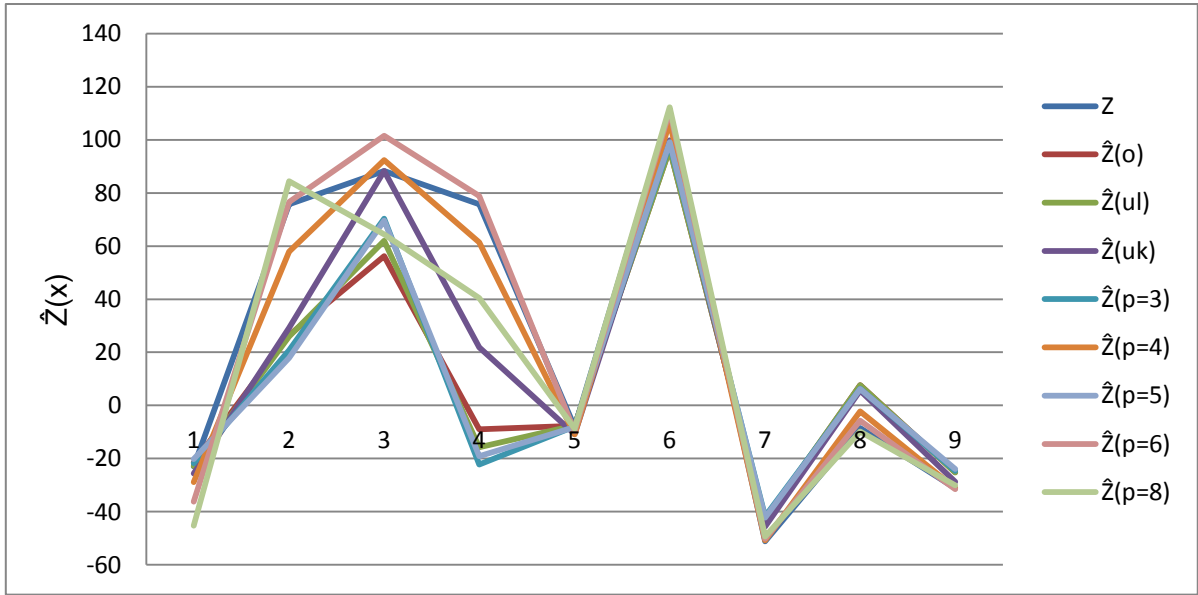
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.12) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Styblinski–Tang fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılr.

$$r(h) = \exp\left(-\frac{h}{7,38}\right) \quad (5.12)$$

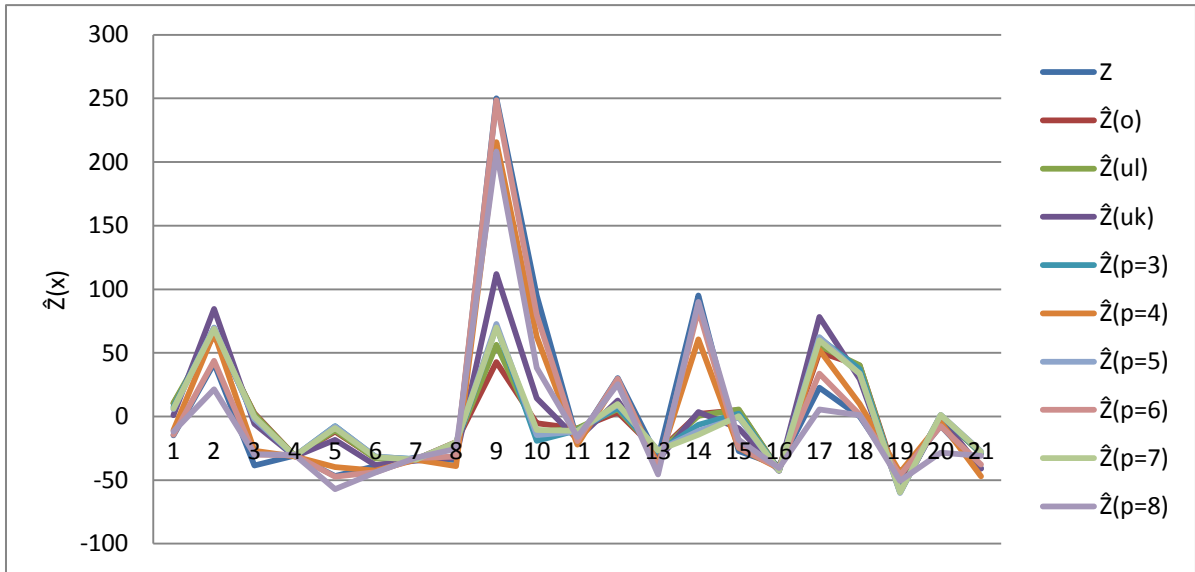
#### 5.4.3 Kesirli Üniversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Kriging meta-modellerinin Styblinski–Tang fonksiyonu için geçerliliği 9, 21 ve 41 deneyden oluşan, model verilerden bağımsız olarak LHT ile üretilen üç ayrı veri seti üzerinde incelenmiştir.

Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahmin grafikleri Şekil 5.20, 5.21 ve 5.22'de görülmektedir.

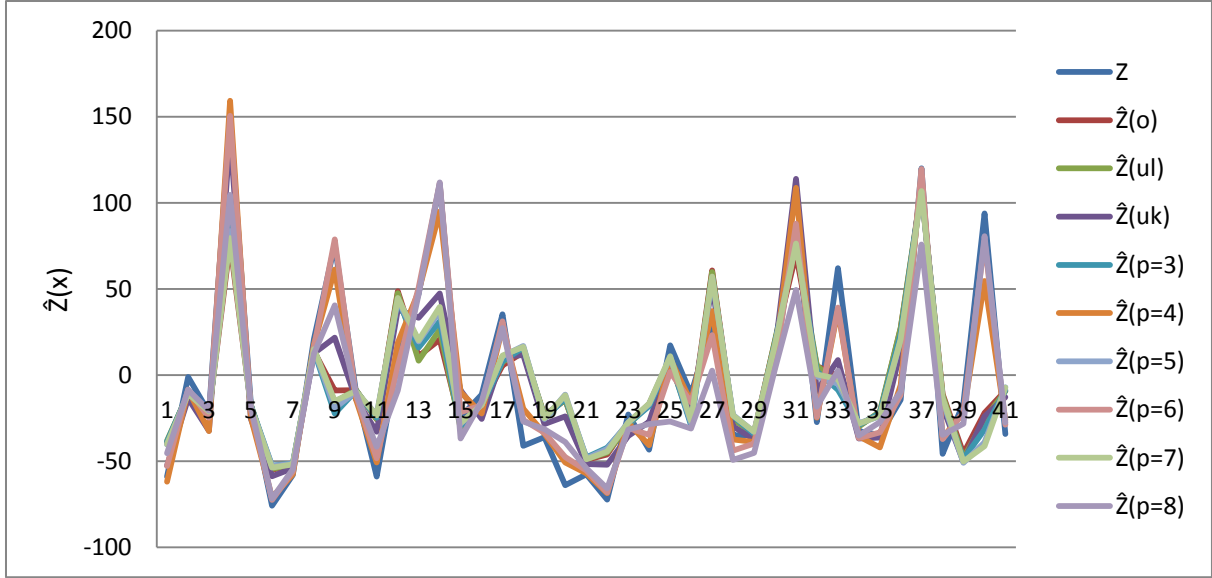


Şekil 5.20 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
( $nv=9$ )



Şekil 5.21 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
( $nv=21$ )





Şekil 5.22 Styblinski–Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

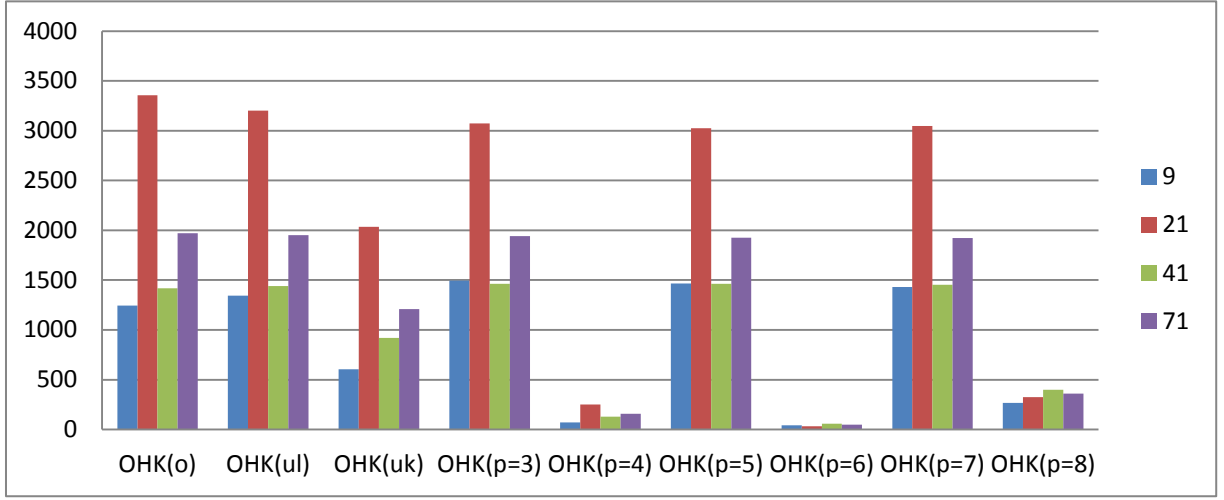
Grafikler incelendiğinde görsel olarak  $p=4$ . ve  $p=6$ . dereceden KÜK meta-modelinin uygun olabileceği görülmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.4.4'e göre yapılır.

#### 5.4.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

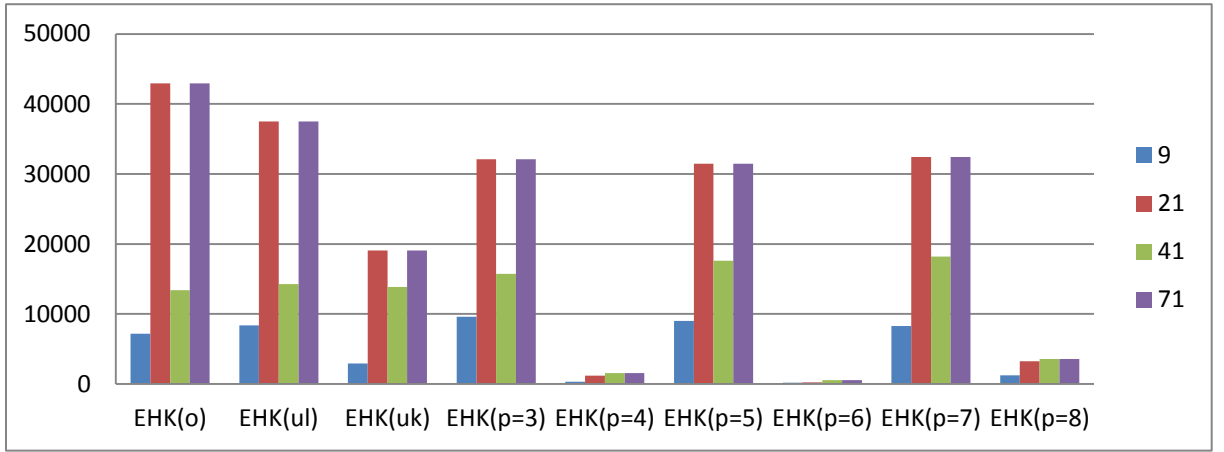
Meta-model geçerliliği farklı büyüklükteki üç veri seti (nv=9, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarım değerleri Çizelge 5.9 'da verilmiştir. Son sütunda üç veri setinin birlikte ele alındığı tek bir veri seti için (nv=71) elde edilen sonuçları vermektedir.

Çizelge 5.9 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin başarımı

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
OK	sabit		1244	3356	1419	1970	7174	42934	13387	42934
ÜK	doğrusal		1345	3201	1442	1950	8372	37485	14266	37485
ÜK	karesel		604	2034	920	1209	2910	19062	13841	19062
KÜK	kesirli üslü	p=3	1496	3074	1461	1943	9612	32089	15708	32089
		p=4	71	253	128	158	321	1191	1525	1525
		p=5	1465	3024	1462	1924	9001	31465	17611	31465
		p=6	<b>41</b>	<b>33</b>	<b>58</b>	<b>49</b>	<b>175</b>	<b>234</b>	<b>529</b>	<b>529</b>
		p=7	1432	3047	1453	1922	8250	32399	18212	32399
		p=8	266	326	400	361	1247	3232	3537	3537



Şekil 5.23 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.24 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Styblinski-Tang fonksiyonu için elde edilen Kriging meta-modellerinin geçerliliği, veri seti büyüklüklerinin etkisini de görmek amacıyla, Şekil 5.23 ve Şekil 5.24'te görüldüğü gibi üç farklı veri seti üzerinde incelenmiştir.

Bu şekillerden p=6. dereceden KÜK meta-modelinin OHK başarımlarının diğer meta-modellere göre çok küçük değer aldığı görülmektedir.

Styblinski-Tang fonksiyonu için altıncı dereceden drift fonksiyona sahip KÜK meta-modeli her üç veri seti için en küçük OHK ile daha kaliteli tahmin vermektedir.

Öte yandan, deney sayısının küçük olması meta-model kurma maliyetini azaltacağından 9 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Bu deneysel inceleme sonuçlarına göre meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artmasının sonucu etkilemediği görülmüştür.

Sonuç olarak Styblinski-Tang fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^6$  KÜK meta-model olarak seçilir.

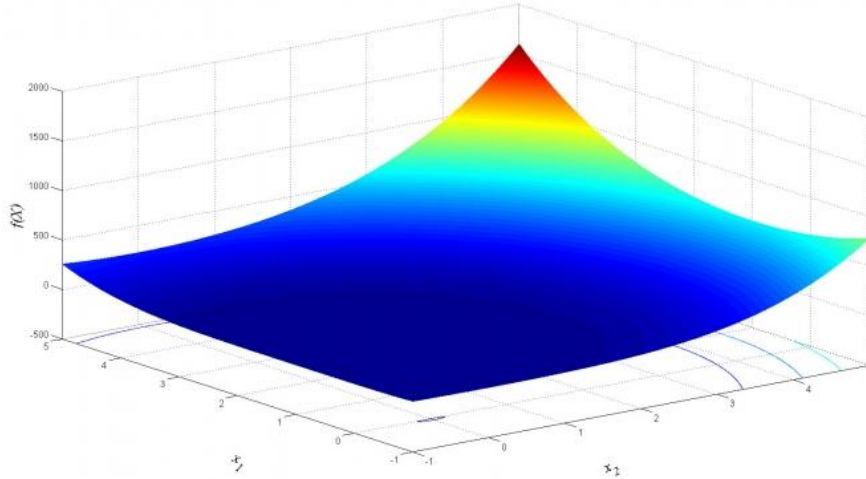
### 5.5 Zettl fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Zettl fonksiyonuna ait eniyileme problemi aşağıda (5.13) ve (5.14) numaralı eşitliklerde verilmiş olup genel çözümü  $f^*(-0,0299; 0) = -0,003791$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = 0.25x_1 + (x_1^2 - 2x_1 + x_2^2)^2 \quad (5.13)$$

$$-5 \leq x_1 \leq 10, -5 \leq x_2 \leq 10 \quad (5.14)$$

Zettl fonksiyonunun yüzey gösterimi Şekil 5.25 ile verilmiştir.



Şekil 5.25 Zettl fonksiyonunun yüzey gösterimi

Zettl fonksiyonu birçok yerel ancak bir genel en küçük çözüme sahiptir.

### 5.5.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.10 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.10 Zetli fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Srası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
1	14	20	2,8	6,4	1866,94
2	24	25	8,8	9,4	21965,4
3	26	15	10	3,4	8385,73
4	11	2	1	-4,4	337,34
5	8	11	-0,8	1	10,2976
6	22	13	7,6	2,2	2248,66
7	20	8	6,4	-0,8	831,04
8	2	5	-4,4	-2,6	1218,31
9	6	19	-2	5,8	1733,39
10	12	26	1,6	10	9872,81
11	17	17	4,6	4,6	1098,08
12	19	6	5,8	-2	679,532
13	15	21	3,4	7	2890,99
14	25	7	9,4	-1,4	5117,46
15	4	9	-3,2	-0,2	277,422
16	13	14	2,2	2,8	69,1084
17	21	24	7	8,8	12644,5
18	5	22	-2,6	7,6	4860,23
19	23	1	8,2	-5	5753,76
20	18	18	5,2	5,2	1909,24
21	10	3	0,4	-3,8	190,54
22	16	10	4	0,4	67,5856
23	7	12	-1,4	1,6	53,2324
24	9	16	-0,2	4	270,224
25	3	4	-3,8	-3,2	1041,05
26	1	23	-5	8,2	10451,8

### 5.5.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

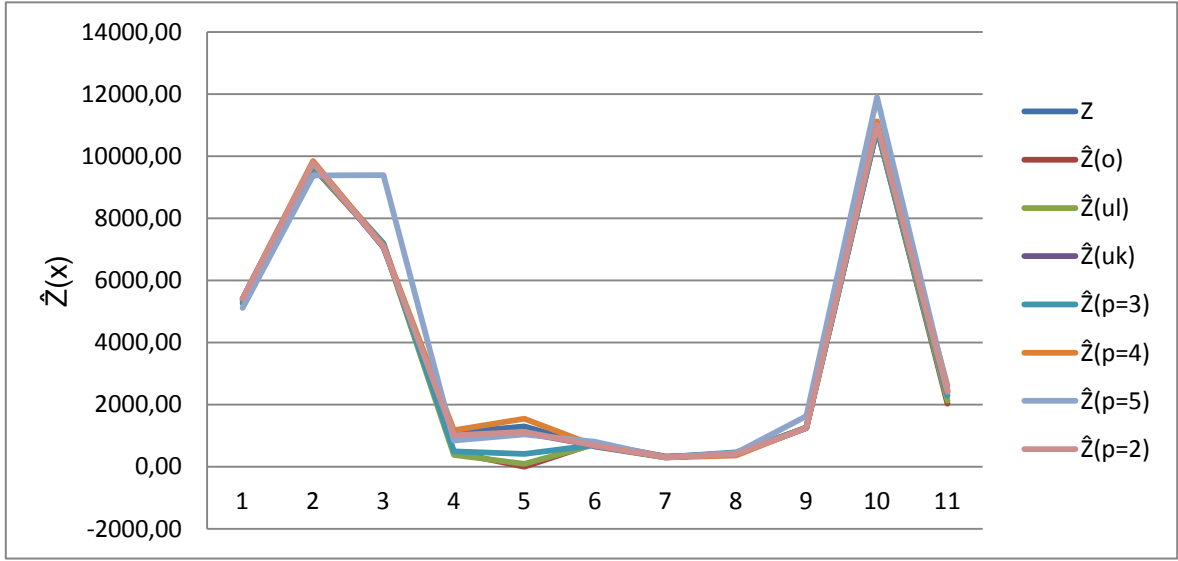
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.15) numaralı eşitlik ile verilen Gaussyen korelogram modelinin Zetli fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = \exp\left(-\left(\frac{h}{11,04}\right)^2\right) \quad (5.15)$$

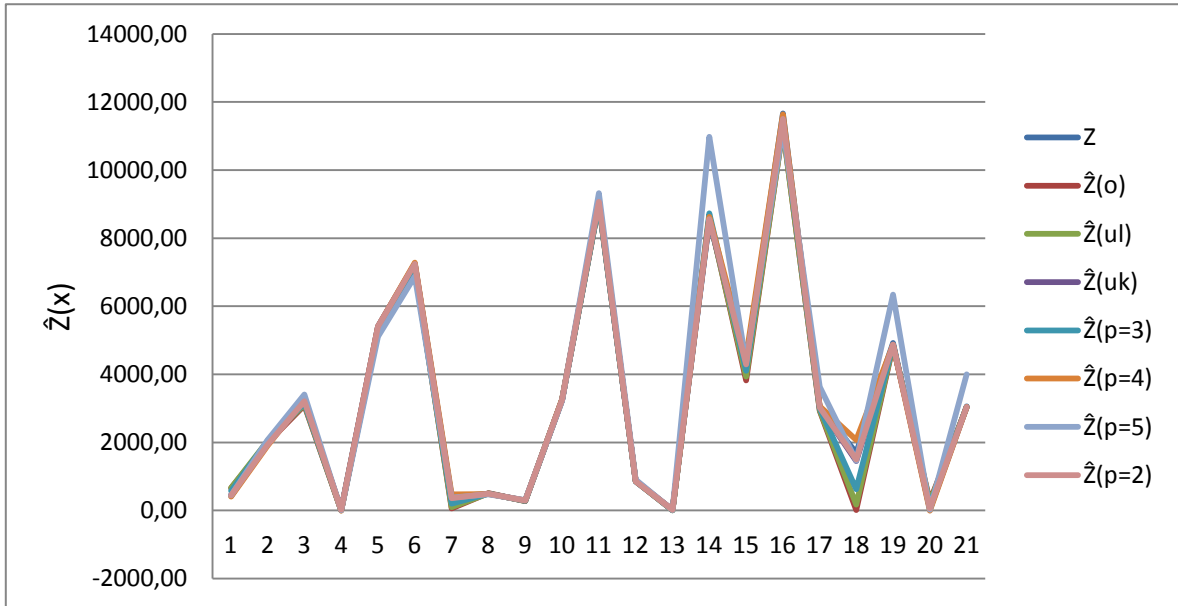
### 5.5.3 Kesirli Ünsersal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Zettl fonksiyonu için elde edilen Kriging meta-modellerinin geçerliliği, meta-modelden bağımsız olarak LHT ile elde edilen; 11, 21 ve 41 deneyden oluşan u ayrı veri seti üzerinde gösterilmiştir.

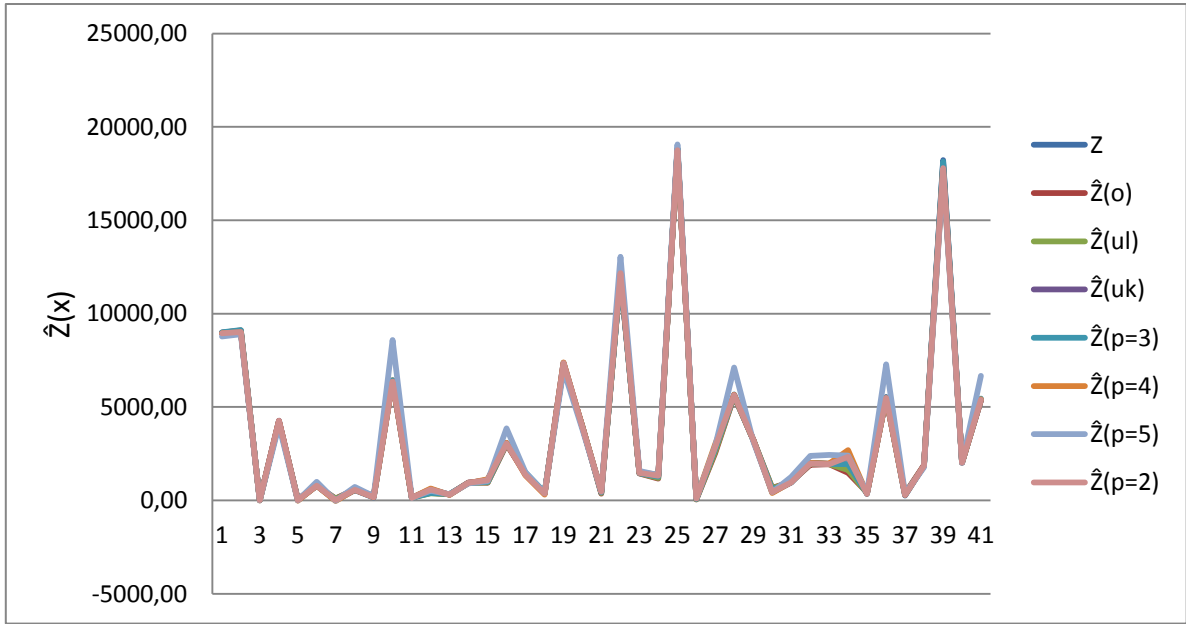
U ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri şekil 5.26, 5.27 ve 5.28 ile verilmektedir.



şekil 5.26 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri ( $n_v=11$ )



şekil 5.27 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri ( $n_v=21$ )



Şekil 5.28 Zettl fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

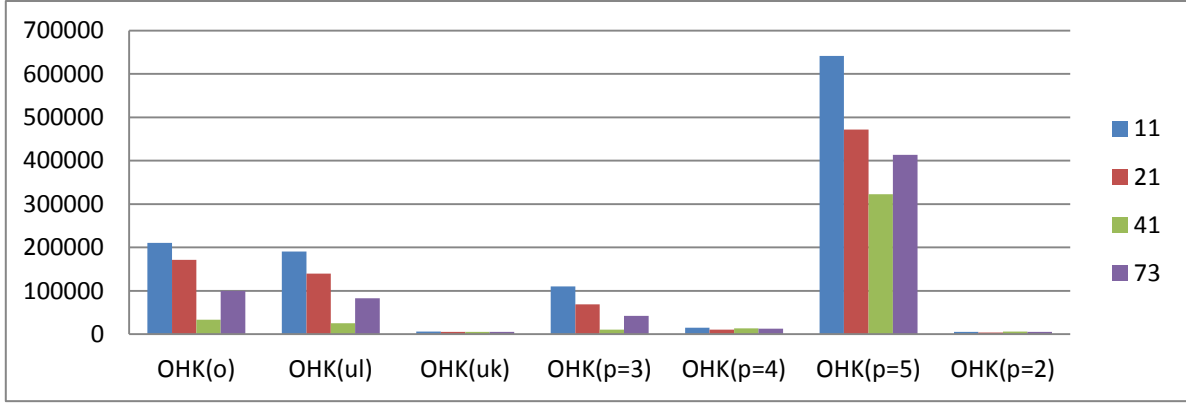
Grafikler incelendiğinde görsel olarak KÜK ve karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.5.4'e göre yapılır.

#### 5.5.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

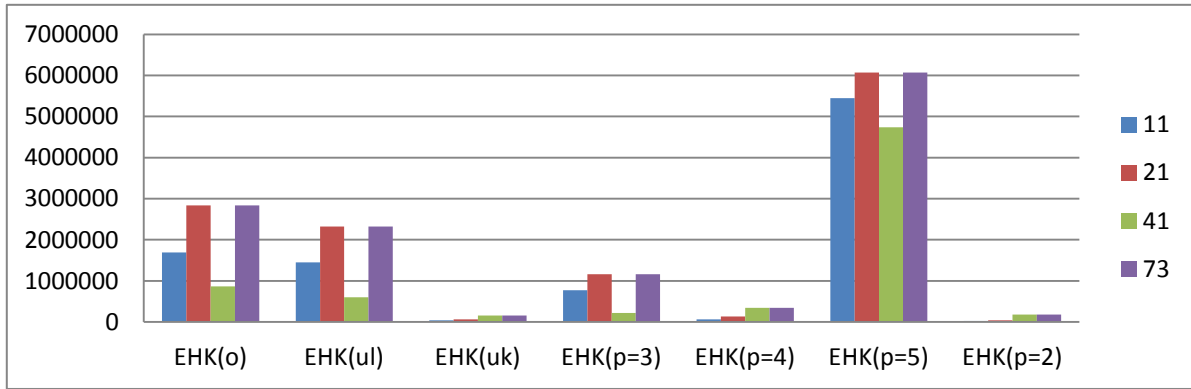
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri setleri (nv=11, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Meta-model başarımları ölçütleri ise Çizelge 5.11 ile verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=73) OHK ve EHK başarımları ölçütlerinin son sütunlarında verilmiştir.

Çizelge 5.11 Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
OK	sabit		210730	171032	33098	99544	1690706	2838571	866538	2838571
ÜK	doğrusal		190636	139733	25305	83135	1449022	2319252	599045	2319252
ÜK	karesel		6315	5015	<b>5195</b>	5312	40998	61727	<b>155709</b>	<b>155709</b>
KÜK	kesirli üslü	p=2	<b>5150</b>	<b>3597</b>	5749	<b>5040</b>	<b>28426</b>	<b>39113</b>	179437	179437
		p=3	110016	69079	10478	42335	775898	1162789	223795	1162789
		p=4	14585	10637	13684	12943	63217	137026	341406	341406
		p=5	641158	471944	322805	413679	5443962	6067551	4736630	6067551



Şekil 5.29 Zettlfonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.30 Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.29 ve 5.30 ile Çizelge 5.11’de verilen Zettl fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği farklı büyüklükteki üç veri seti üzerinde karşılaştırılarak incelenmiştir.

Onbir deneyli veri seti için  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelinin OHK ve EHK başarımları diğer meta-modellere göre çok küçük değer almaktadır.

Benzer şekilde, 21 deneyli veri seti için  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelinin OHK ve EHK başarımları diğer meta-modellere göre çok küçük değer almaktadır. 41 deneyli veri seti için ise karesel drift fonksiyonlu ÜK modelinin ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelinin OHK ve EHK başarımları diğer meta-modellere göre çok küçük değer almaktadır. Model geçirmede tüm veri seti ( $n_v=73$ ) dikkate alındığında OHK’ya göre hem karesel drift fonksiyonlu hem de  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modellerinin başarımları açısından benzer sonucu verdiği, EHK’ya göre ise  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modellerinin başarımlarının diğer meta-modellere göre çok küçük değer

aldığı görülmektedir. Öte yandan geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılmasının maliyeti azaltacağı bilindiğinden geçerlilik testi için 11 deneyli veri setinin kullanılması yeterlidir. Sonuç olarak, Zettl fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^2$  KÜK meta-modeli olarak seçilir.

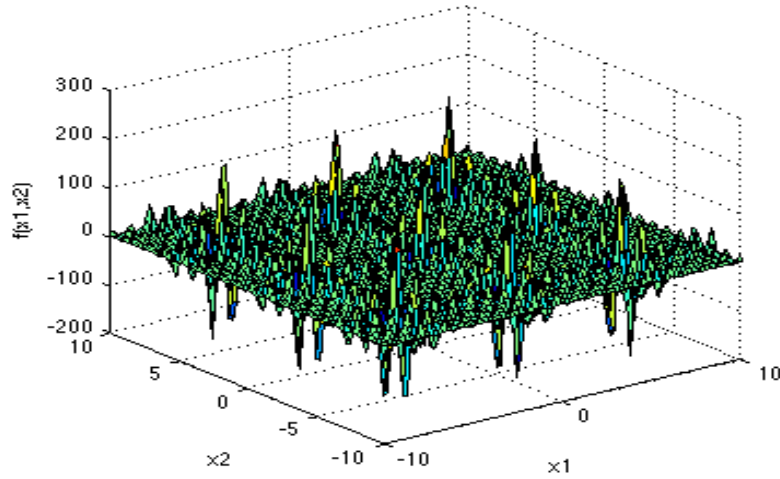
## 5.6 Shubert Fonksiyonu

Shubert [70]'ten alınan Shubert fonksiyonuna ait eniyileme problemi aşağıda (5.16) ve (5.17) numaralı eşitliklerde verilmiştir.

$$\text{Enk } f(x) = \left( \sum_{i=1}^5 \text{icos}((i+1)x_1 + i) \right) \left( \sum_{i=1}^5 \text{icos}((i+1)x_2 + i) \right) \quad (5.16)$$

$$-10 \leq x_1 \leq 10, -10 \leq x_2 \leq 10 \quad (5.17)$$

Shubert fonksiyonunun yüzey gösterimi Şekil 5.31'da gösterilmiştir.



Şekil 5.31 Shubert fonksiyonunun yüzey gösterimi

Shubert fonksiyonu 18 genel ve 760 yerel en küçük çözüme sahiptir.



### 5.6.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.12 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.12 Shubert fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	x		Z(x)
			x1	x2	
1	12	23	-1,2	7,6	-15,1534
2	14	8	0,4	-4,4	-8,2999
3	21	13	6	-0,4	22,9427
4	3	14	-8,4	0,4	17,1380
5	13	5	-0,4	-6,8	-11,0130
6	19	2	4,4	-9,2	13,6277
7	2	10	-9,2	-2,8	3,4361
8	26	18	10	3,6	5,0611
9	16	19	2	4,4	-3,5987
10	11	22	-2	6,8	8,3769
11	25	15	9,2	1,2	-3,4049
12	4	20	-7,6	5,2	-29,7251
13	7	7	-5,2	-5,2	0,0048
14	24	16	8,4	2	-1,0108
15	20	21	5,2	6	-20,2626
16	17	25	2,8	9,2	4,3474
17	5	24	-6,8	8,4	4,4125
18	8	1	-4,4	-10	0,6174
19	10	12	-2,8	-1,2	-5,7085
20	23	6	7,6	-6	10,5586
21	9	11	-3,6	-2	-12,5581
22	15	26	1,2	10	-6,8811
23	18	3	3,6	-8,4	-7,4694
24	22	9	6,8	-3,6	-2,7688
25	6	4	-6	-7,6	-39,6033
26	1	17	-10	2,8	0,6789

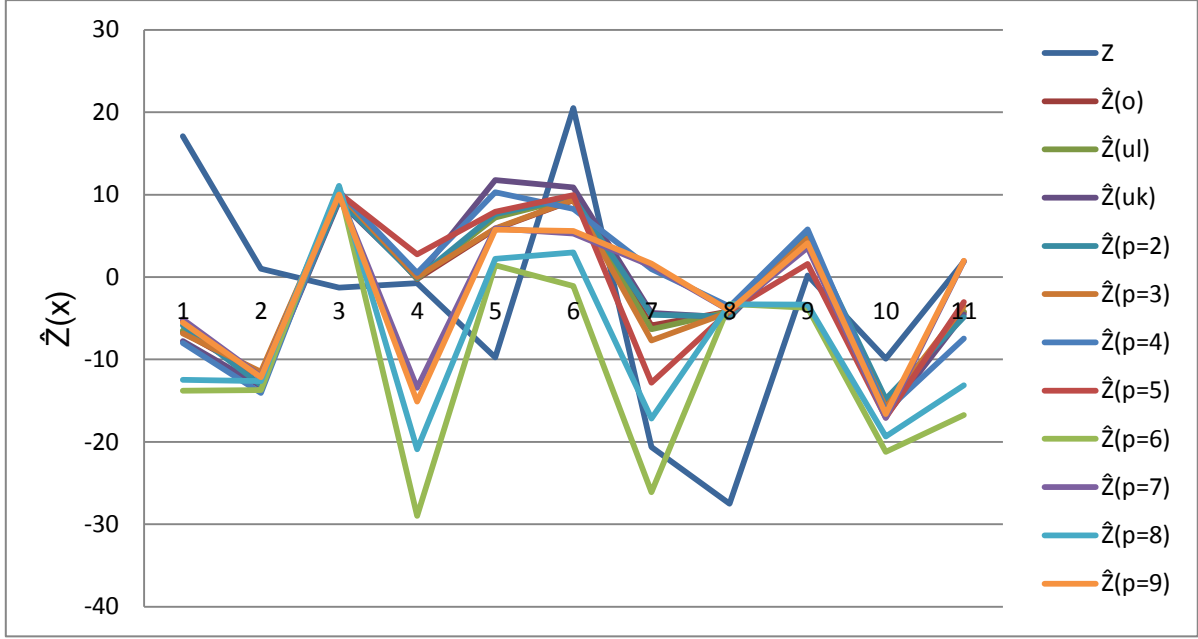
### 5.6.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.18) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Shubert fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılr.

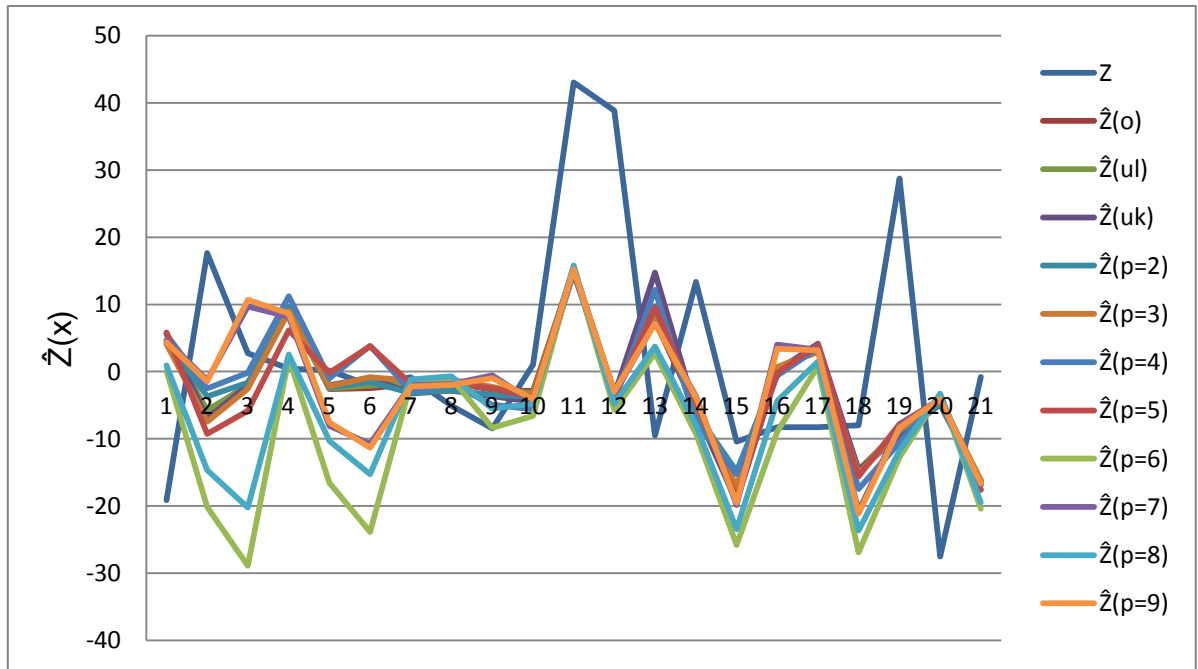
$$r(h) = \exp\left(-\frac{h}{18,2}\right) \quad (5.18)$$

### 5.6.3 Kesirli Ünsel Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

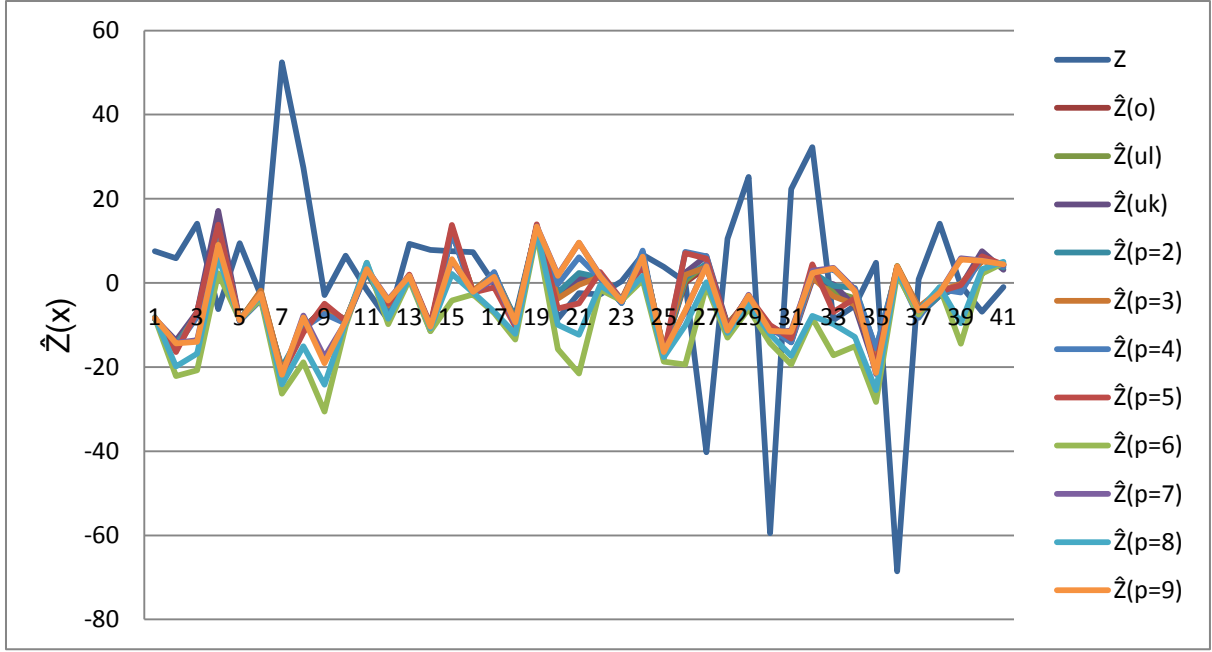
Shubert fonksiyonunun Kriging meta-modellerinin geçerliliği, meta-modelden bağımsız olarak LHT ile elde edilen; 11, 21 ve 41 deneyden oluşan üç ayrı veri seti üzerinde gösterilmiştir. Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahmin grafikleri Şekil 5.32, 5.33 ve 5.34'te görölmektedir.



Şekil 5.32 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11)



Şekil 5.33 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.34 Shubert fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

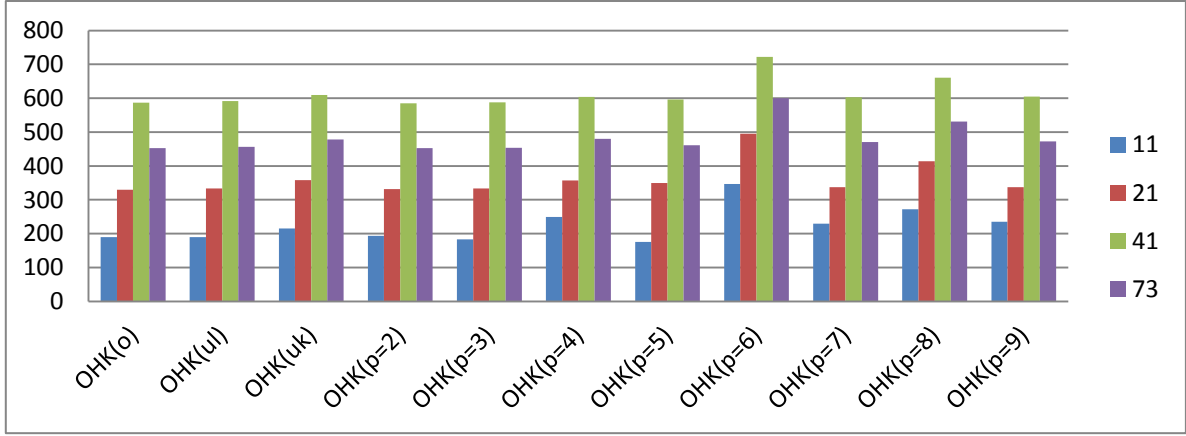
Grafikler incelendiğinde görsel olarak p=5. ve p=3. dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.6.4'e göre yapılır.

#### 5.6.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

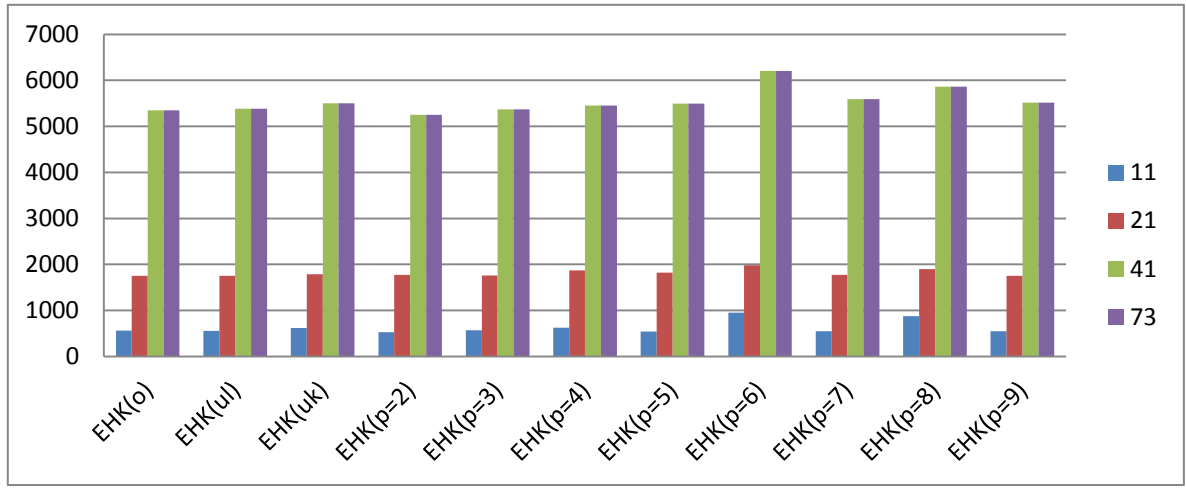
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=11, nv=21, nv=41) için incelenmiş ve OHK ve EHK başarımları ölçütları Çizelge 5.13 ile verilmiştir. Son sütunda ise üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=73) başarımları ölçütları verilmiştir.

Çizelge 5.13 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
OK	sabit		189,7	<b>329,3</b>	587,1	453,1	565,2	1752,6	5346,9	5346,9
ÜK	doğrusal		190,2	333,3	591,4	456,7	557,0	<b>1750,1</b>	5382,5	5382,5
ÜK	karesel		215,7	358,2	609,4	477,8	617,7	1789,0	5504,6	5504,6
KÜK	kesirli üslü	p=2	193,3	331,6	<b>584,7</b>	<b>452,9</b>	526,8	1775,6	<b>5250,2</b>	<b>5250,2</b>
		p=3	183,6	333,1	587,5	453,5	572,2	1762,8	5372,0	5372,0
		p=4	249,2	357,1	604,3	479,7	629,3	1871,5	5450,8	5450,8
		p=5	<b>175,4</b>	349,3	595,9	461,6	<b>545,8</b>	1821,2	5495,9	5495,9
		p=6	346,8	494,9	722,2	600,2	952,9	1983,6	6203,6	6203,6
		p=7	229,3	337,6	602,7	470,1	546,9	1777,1	5590,1	5590,1
		p=8	272,0	413,7	661,0	531,2	874,9	1897,6	5861,4	5861,4
		p=9	234,8	337,0	605,1	472,2	546,9	1750,2	5515,8	5515,8



Şekil 5.35 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.36 Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.35 ve 5.36 ile Çizelge 5.13'te verilen Shubert fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği farklı büyüklükteki üç veri seti ve hepsinin toplamından oluşan veri seti üzerinde karşılaştırılarak incelenmiştir.

Çizelge 5.13'ten 11 deneyli veri seti için  $p=5$ . dereceden KÜK meta-modelinin OHK ve EHK başarımlarının diğer meta-modellere göre çok küçük değer aldığı, 21 deneyli veri seti için OK meta-modelinin OHK'ya göre, ÜK meta-modelinin ise EHK'ya göre başarılı olduğu görülmektedir. 41 ve 73 deneyle elde edilen veri seti için ise  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelinin hem OHK hem de EHK'ya göre daha başarılı olduğu görülmüştür. Sonuç olarak KÜK meta-modelinin Shubert fonksiyonu için her test sonucuna göre en uygun meta-model olduğu görülmüştür.

Bu durumda, yukarıdaki 11 deneyli veri seti ile elde edilen meta-model geçерleme sonucuna göre p=5. dereceden KÜK meta-modelinin Shubert fonksiyonu için uygun meta-model olduğu söylenebilir.

Öte yandan geçerlik işlemleri için az sayıda deney sayısının kullanılmasının maliyeti azaltacağı bilindiğinden 11 deneyli veri setinin yeterli olacağı düşünölmektedir. Sonuç olarak Shubert fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^5$  KÜK meta-modeli seçilmiştir.

## 5.7 Üç Boyutlu Styblinski–Tang Fonksiyonu

Jamil and Yang [69]’dan alınan Styblinski–Tang fonksiyonuna ait 3 boyutlu eniyileme problemi aşağıda (5.19) ve (5.20) numaralı eşitliklerde verilmiş olup genel çözümü  $f^*(-2,903534; -2,903534; -2,903534) = -117,498$ ’dir.

$$\text{Enk } f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k x_i^4 - 16x_i^2 + 5x_i \quad (5.19)$$

$$-5 \leq x_i \leq 5, 1 \leq i \leq 3 \quad (5.20)$$

### 5.7.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.14 25 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.14 Styblinski–Tang fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	D3	x			Z(x)
				x1	x2	x3	
1	16	11	25	1	-1	4,6	51,0928
2	1	10	17	-5	-1,4	1,4	72,4816
3	23	9	22	3,8	-1,8	3,4	-44,0976
4	18	8	1	1,8	-2,2	-5	51,3216
5	22	13	12	3,4	-0,2	-0,6	-22,2976
6	15	4	9	0,6	-3,8	-1,8	-47,2496
7	7	7	11	-2,6	-2,6	-1	-85,4624
8	14	15	23	0,2	0,6	3,8	-2,8976
9	12	19	14	-0,6	2,2	0,2	-25,6416
10	13	6	7	-0,2	-3	-2,6	-77,5504
11	9	17	18	-1,8	1,4	1,8	-51,6016
12	19	21	6	2,2	3	-3	-84,5072
13	10	25	4	-1,4	4,6	-3,8	28,0704
14	4	24	2	-3,8	4,2	-4,6	47,2944
15	3	20	10	-4,2	2,6	-1,4	-38,0256

Çizelge 5.14 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	D3	x			Z(x)
				x1	x2	x3	
16	5	23	8	-3,4	3,8	-2,2	-68,4336
17	17	12	19	1,4	-0,6	2,2	-36,0816
18	11	16	15	-1	1	0,6	-16,3152
19	20	14	20	2,6	0,2	2,6	-49,2816
20	6	2	13	-3	-4,6	-0,2	3,2736
21	24	3	3	4,2	-4,2	-4,2	32,8944
22	8	5	5	-2,2	-3,4	-3,4	-100,834
23	21	1	24	3	-5	4,2	100,965
24	2	18	21	-4,6	1,8	3	2,9216
25	25	22	16	4,6	3,4	1	43,9296

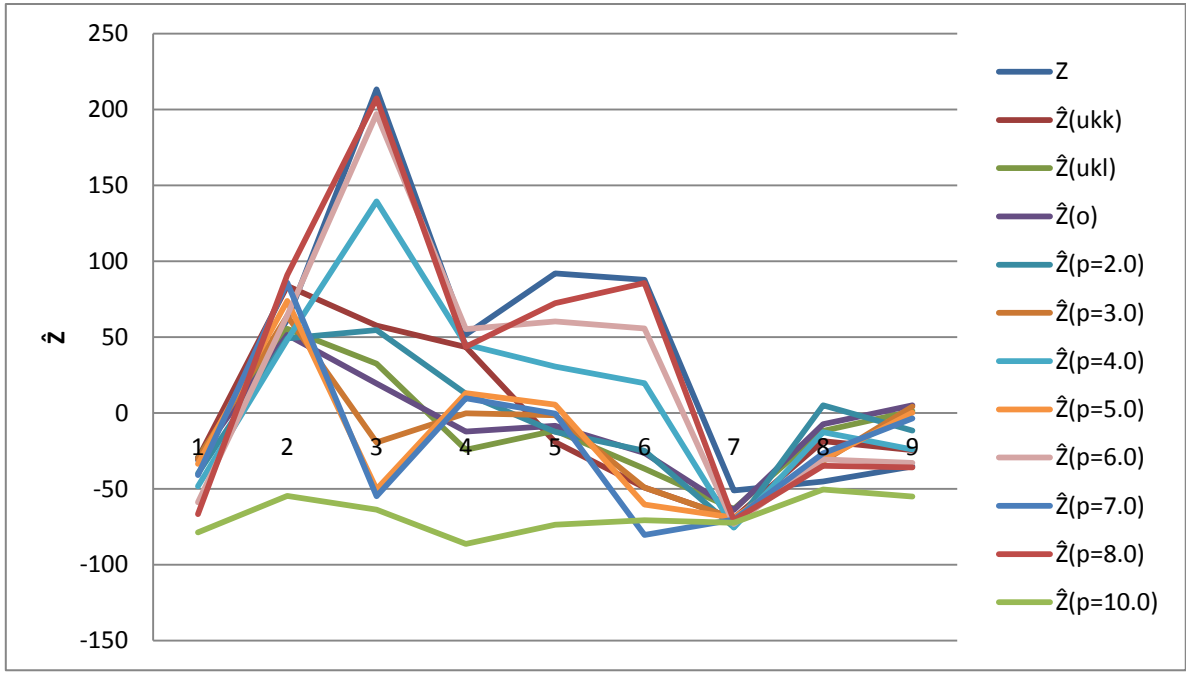
### 5.7.2 Varyogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram incelemesi yapılarak (5.21) numaralı eşitlik ile verilen kubbesel varyogram modelinin Styblinski–Tang fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

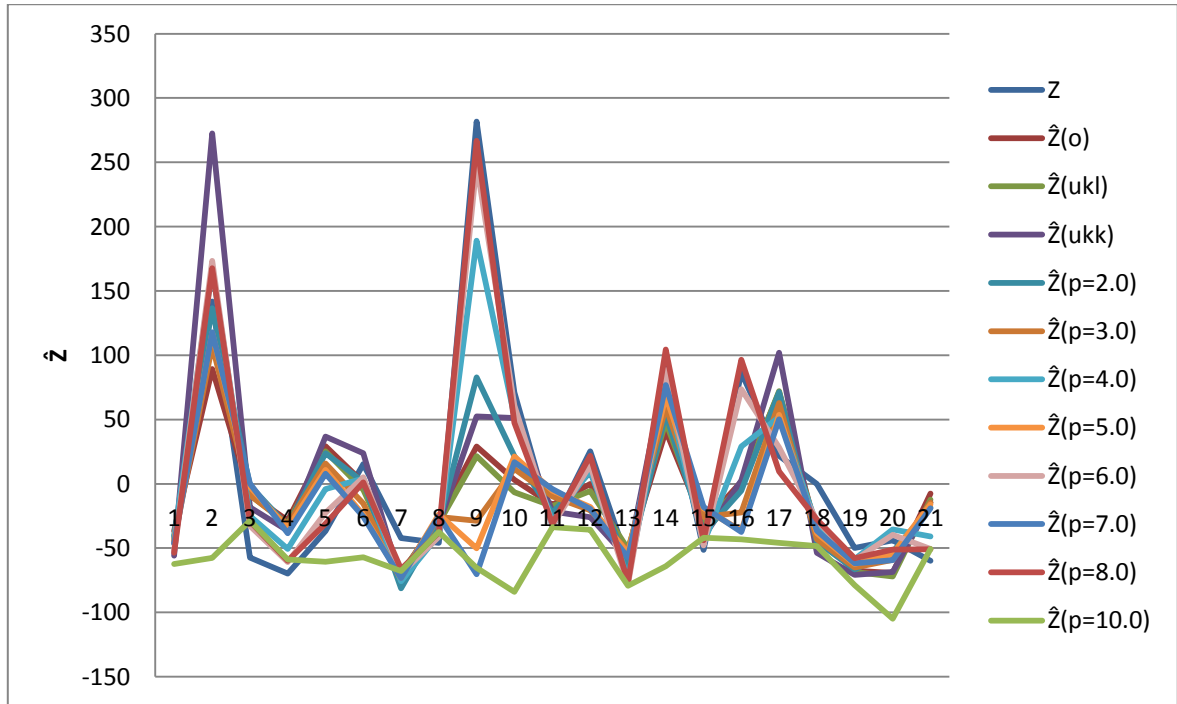
$$\gamma(h) = 3770,8 * [ 1,5 * \left(\frac{h}{10}\right) - 0,5 * \left(\frac{h}{10}\right)^3 ] \quad (5.21)$$

### 5.7.3 Kesirli Ünsersal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

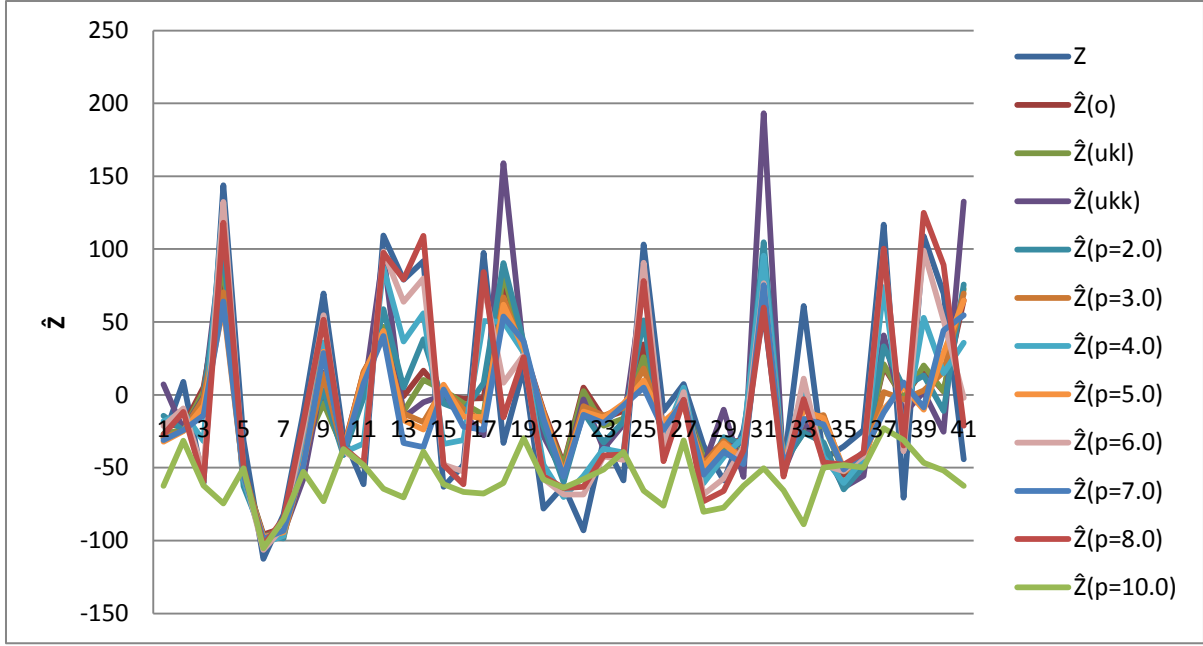
Kriging meta-modellerinin üç boyutlu Styblinski–Tang fonksiyonu için geçerliliğinde 9, 21 ve 41 deneyden oluşan, model verilerinden bağımsız olarak LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır. Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminlerinin grafikleri Şekil 5.37, 5.38 ve 5.39 ile verilmektedir.



Şekil 5.37 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
( $nv=9$ )



Şekil 5.38 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri  
( $nv=21$ )



Şekil 5.39 Styblinski-Tang fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Grafikler incelendiğinde görsel olarak p=6. ve p=8. dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.7.4'e göre yapılır.

#### 5.7.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=9, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.15 ile verilmiştir. Üç veri setinin birlikte dikkate alındığı veri seti (nv=71) ile elde edilen başarımlar ölçütleri ise OHK ve EHK'nın son sütunlarında verilmiştir.

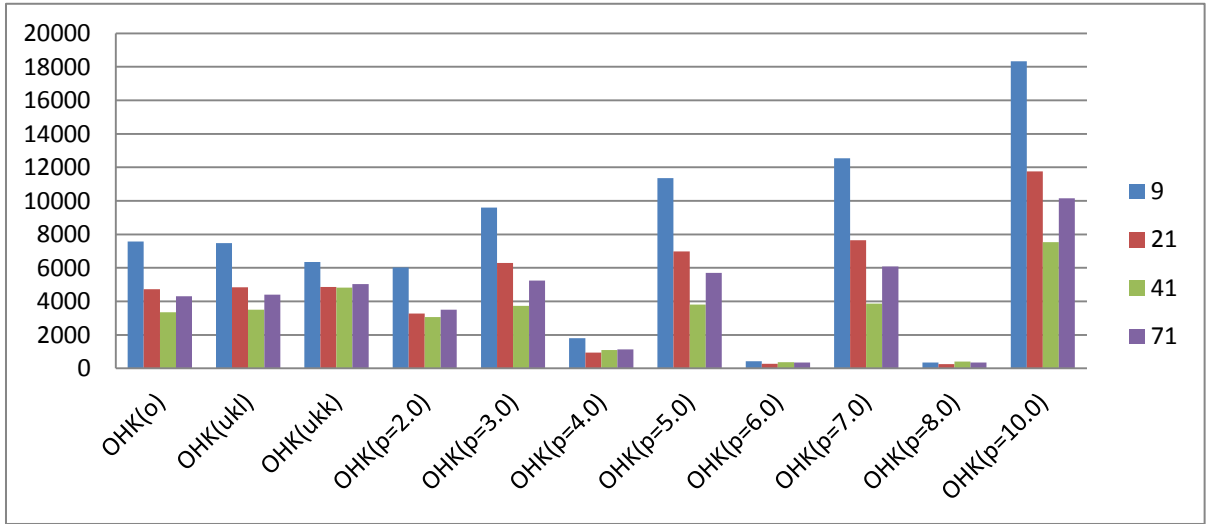
Çizelge 5.15 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
OK	sabit		7564,7	4723,7	3355,9	4294,0	37616,8	63858,7	11899,1	63858,7
ÜK	doğrusal		7475,9	4845,3	3496,7	4400,0	32713,5	67769,6	13679,4	67769,6
ÜK	karesel		6342,8	4855,3	4817,4	5022,0	24272,6	52568,2	36874,7	52568,2

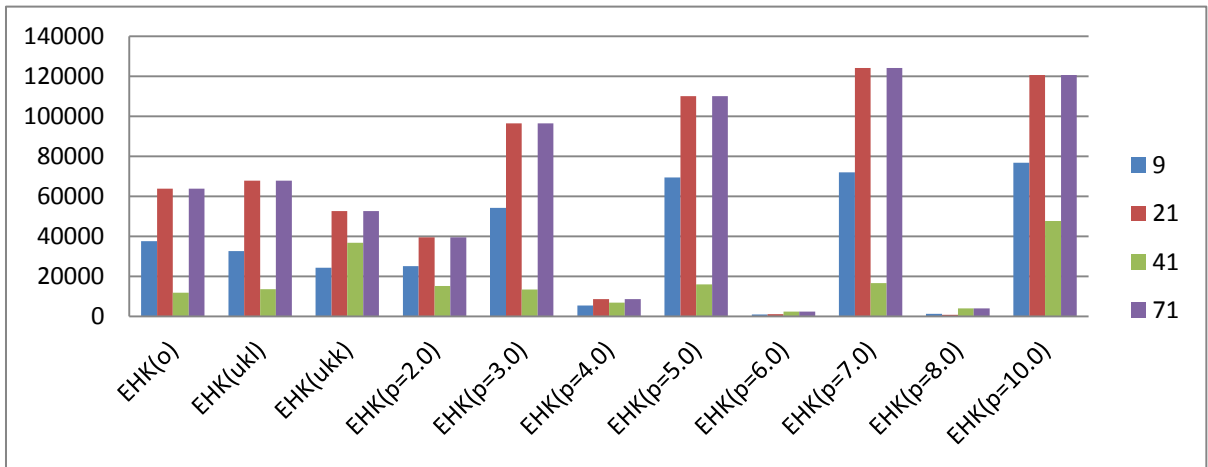


Çizelge 5.15 devam ediyor

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=21	nv=41	nv=71	nv=9	nv=21	nv=41	nv=71
KÜK	kesirli üslü	p=2	6021,0	3269,9	3069,5	3502,9	25199,2	39557,7	15249,7	39557,7
		p=3	9595,3	6289,2	3729,7	5230,3	54146,2	96454,1	13456,4	96454,1
		p=4	1795,1	933,2	1101,7	1139,8	5467,7	8604,2	6893,0	8604,2
		p=5	11361,0	6979,8	3796,8	5697,1	69452,5	110097,1	16081,1	110097,1
		p=6	421,9	267,6	<b>371,0</b>	346,9	<b>1024,0</b>	1088,5	<b>2485,5</b>	<b>2485,5</b>
		p=7	12537,6	7641,5	3861,7	6079,4	71913,5	124015,2	16591,5	124015,2
		p=8	<b>346,1</b>	<b>245,3</b>	395,9	<b>345,1</b>	1270,6	<b>793,1</b>	4090,9	4090,9
		p=10	18329,4	11748,8	7539,1	10152,0	76801,3	120535,4	47709,0	120535,4



Şekil 5.40 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.41 Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.40 ve 5.41 ile Çizelge 5.15'te verilen üç boyutlu Styblinski-Tang fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır.

Çizelge 5.15 kriging meta-modellerinin model doğrulama için kullanılan üç farklı veri setleri ve üç veri setlerinin tamamına göre başarımları karşılaştırılmıştır. Dokuz deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere p=8. ve p=6. dereceden KÜK meta-modellerinin birbirine yakın değer aldıkları görülmektedir. Diğer ölçüt olan EHK'yi dikkate alınırsa, p=6. ve p=8. dereceden KÜK meta-modelleri arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varırız bu iki meta-modelden p=6. dereceden veya p=8 dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir.

Benzer şekilde model doğrulamada, 21 deneyli veri seti dikkate alındığında p=8. ve p=6. dereceden KÜK meta-modeli yaklaşık aynı sonuçları vermektedir. 41 deneyli veri seti dikkate alındığında p=8. ve p=6. dereceden KÜK meta-modelleri yaklaşık aynı sonuçları vermektedir.

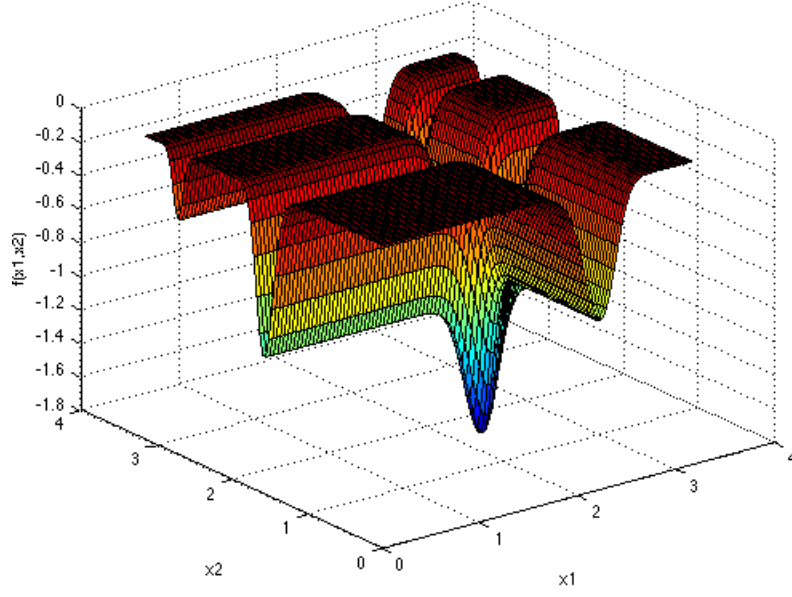
Tüm veri seti dikkate alındığında p=8. ve p=6. dereceden KÜK meta-modellerinin arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varılır. Böylece bu iki modelden p=8. dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir. Sonuç olarak deney yapmanın maliyeti dikkate alındığında, üç boyutlu Styblinski-Tang fonksiyonu için 9 deneyli veri setine göre seçilen p=8. dereceden KÜK meta-modeli geçerlilikte kullanılan veri sayısı artmasına rağmen değişmemektedir ve  $\mu(x) = \sum_{i=1}^2 \beta_i x_i^8$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritalarda kullanılır.

## 5.8 Michaelwicz Fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Michaelwicz fonksiyonuna ait üç boyutlu eniyileme problemi aşağıda (5.22) ve (5.23) numaralı eşitliklerde verilmiştir.

$$\text{Enk } f(x) = - \sum_{i=1}^k \sin(x_i) \left[ \sin\left(\frac{ix_i^2}{\pi}\right) \right]^{2m} \quad (5.22)$$

$$0 \leq x_i \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq 3, \quad m = 10 \quad (5.23)$$



Şekil 5.42 Michaelwicz fonksiyonununun yüzey gösterimi

Michalewicz fonksiyonu birçok yerel ancak bir genel en küçük çözüme sahiptir.

### 5.8.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.16 25 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.16 Michaelwicz fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	D3	x			Z(x)
				x1	x2	x3	
1	16	11	25	1,96350	1,30900	3,14159	-0,07079
2	1	10	17	0,00000	1,17810	2,09440	-0,13925
3	23	9	22	2,87979	1,04720	2,74889	-0,04146
4	18	8	1	2,22529	0,91630	0,00000	-0,01046
5	22	13	12	2,74889	1,57080	1,43990	0,00000
6	15	4	9	1,83260	0,39270	1,04720	-0,03599
7	7	7	11	0,78540	0,78540	1,30900	-0,33912
8	14	15	23	1,70170	1,83260	2,87979	-0,07882
9	12	19	14	1,43990	2,35619	1,70170	-0,11190
10	13	6	7	1,57080	0,65450	0,78540	-0,00164
11	9	17	18	1,04720	2,09440	2,22529	-0,00953
12	19	21	6	2,35619	2,61799	0,65450	-0,00068
13	10	25	4	1,17810	3,14159	0,39270	0,00000
14	4	24	2	0,39270	3,01069	0,13090	0,00000
15	3	20	10	0,26180	2,48709	1,17810	-0,00056
16	5	23	8	0,52360	2,87979	0,91630	0,00000
17	17	12	19	2,09440	1,43990	2,35619	-0,04146

Çizelge 5.16 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	D3	x			Z(x)
				x1	x2	x3	
18	11	16	15	1,30900	1,96350	1,83260	-0,13925
19	20	14	20	2,48709	1,70170	2,48709	-0,00002
20	6	2	13	0,65450	0,13090	1,57080	-0,00098
21	24	3	3	3,01069	0,26180	0,26180	0,00000
22	8	5	5	0,91630	0,52360	0,52360	0,00000
23	21	1	24	2,61799	0,00000	3,01069	0,00000
24	2	18	21	0,13090	2,22529	2,61799	0,00000
25	25	22	16	3,14159	2,74889	1,96350	-0,20037

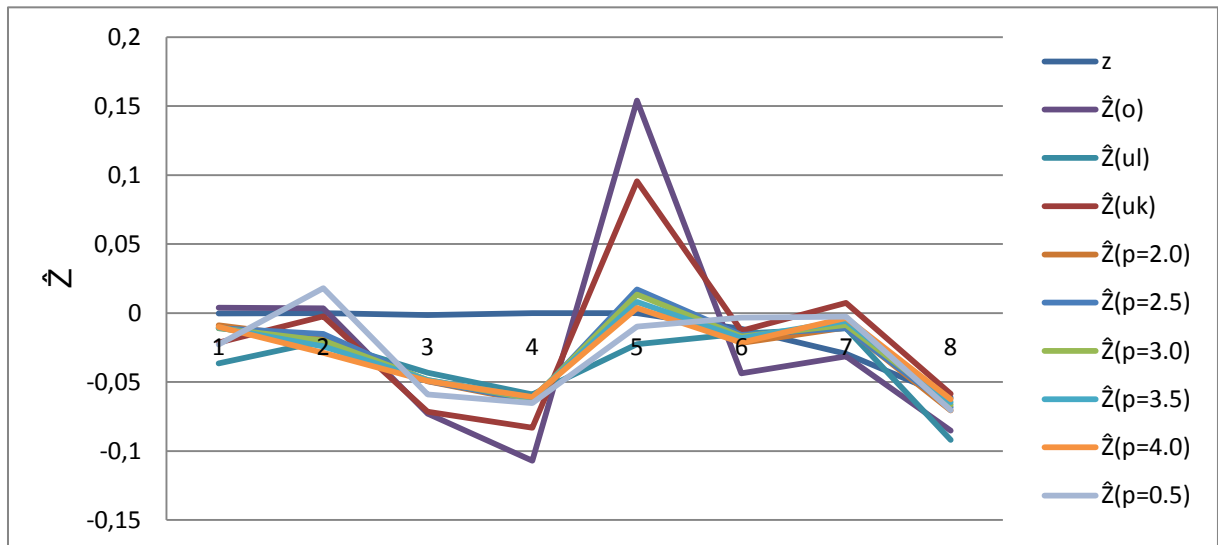
### 5.8.2 Varyogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram incelemesi yapılarak (5.24) numaralı eşitlik ile verilen kubbesel varyogram modelinin Michaelwicz fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

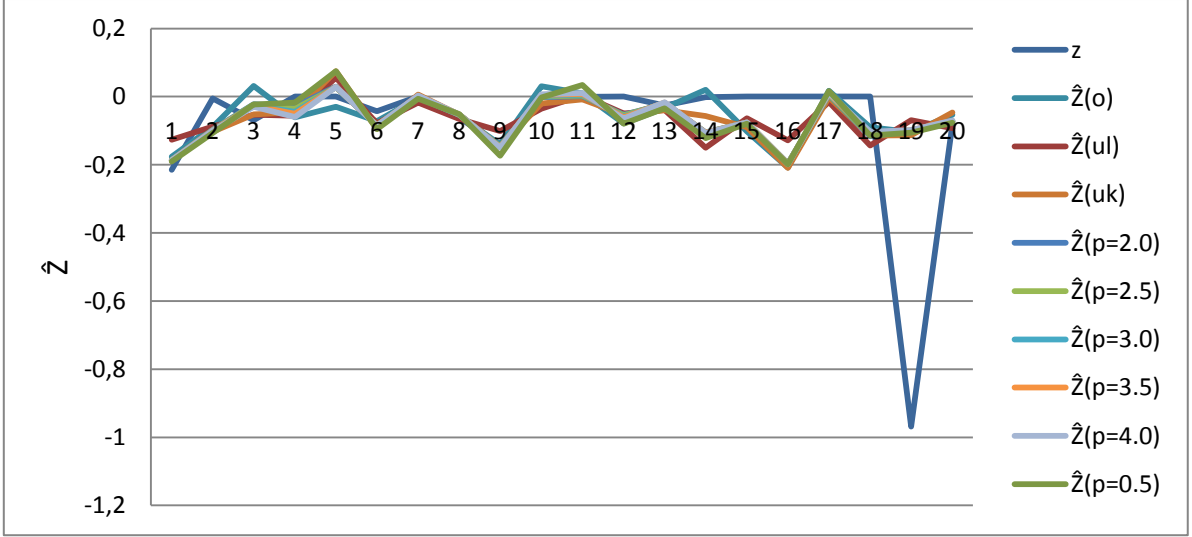
$$\gamma(h) = 0,007 \left[ 1,5 \left( \frac{h}{2,7} \right) - 0,5 \left( \frac{h}{2,7} \right)^3 \right] \quad (5.24)$$

### 5.8.3 Kesirli Üiversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

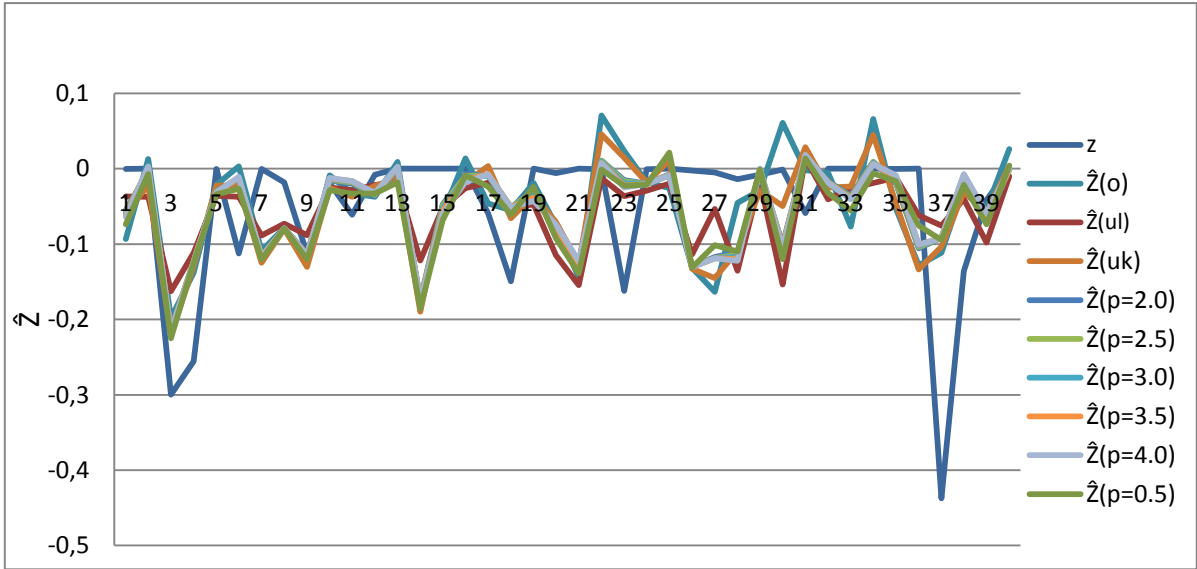
Kriging meta-modellerinin Michaelwicz fonksiyonu için geçerliliğinde 8, 20 ve 40 deneyden oluşan, model kurarken kullandığımız verilerden bağımsız LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır. Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 5.43, 5.44 ve 5.45 ile verilmektedir.



Şekil 5.43 Michaelwicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=8)



Şekil 5.44 Michaeliewicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=20)



Şekil 5.45 Michaeliewicz fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=40)

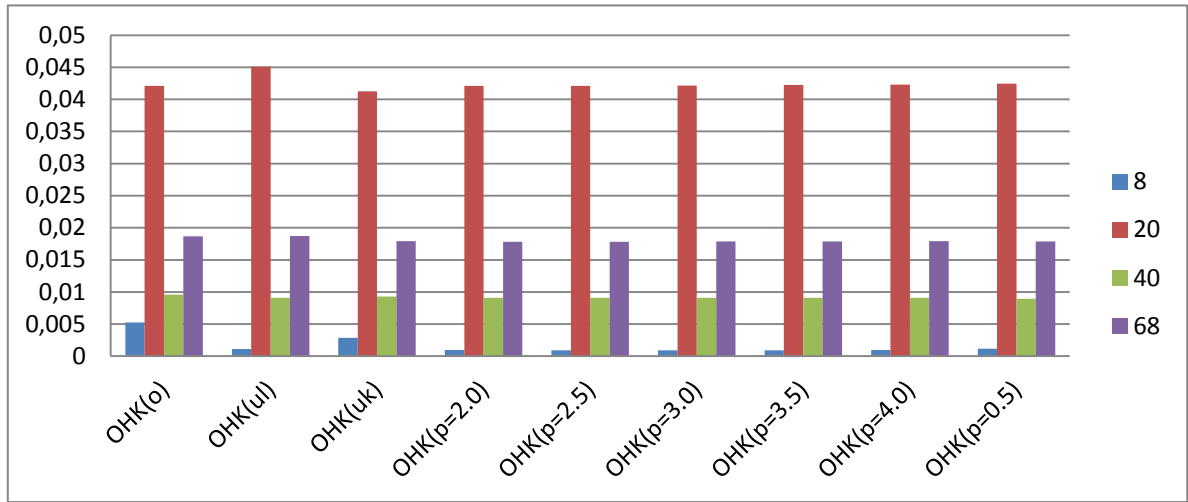
Grafikler incelendiğinde görsel olarak KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.8.4'e göre yapılır.

#### 5.8.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

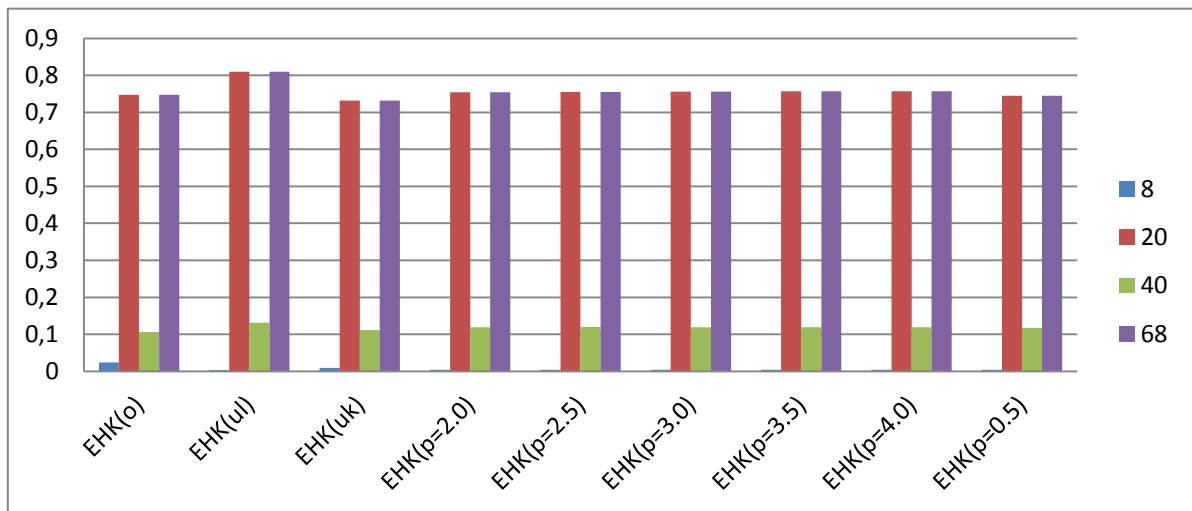
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=8, nv=20, nv=40) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.17 ile verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=68) sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 5.17 Michaeliewicz fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=8	nv=20	nv=40	nv=68	nv=8	nv=20	nv=40	nv=68
OK	sabit		0,00524	0,04210	0,00960	0,01865	0,0237	0,7474	<b>0,1060</b>	0,7474
ÜK	doğrusal		0,00109	0,04507	0,00910	0,01874	<b>0,0035</b>	0,8099	0,1309	0,8099
ÜK	karesel		0,00285	0,04126	0,00929	0,01793	0,0091	<b>0,7316</b>	0,1115	<b>0,7316</b>
KÜK	kesirli üslü	p=0,5	0,00117	0,04243	<b>0,00894</b>	0,01788	0,0043	0,7451	0,1174	0,7451
		p=2	0,00096	<b>0,04208</b>	0,00909	0,01784	0,0041	0,7540	0,1194	0,7540
		p=2,5	0,00092	0,04209	0,00909	<b>0,01783</b>	0,0040	0,7549	0,1196	0,7549
		p=3	<b>0,00091</b>	0,04217	0,00908	0,01785	0,0039	0,7561	0,1195	0,7561
		p=3,5	0,00092	0,04224	0,00909	0,01788	0,0037	0,7569	0,1194	0,7569
		p=4	0,00096	0,04230	0,00909	0,01790	0,0037	0,7571	0,1190	0,7571



Şekil 5.46 Michaeliewicz ffonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.47 Michaeliewicz fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.46 ve 5.47 ile Michaeliewicz fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır.

Sekiz deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında  $p=2.$ ,  $p=2,5.$ ,  $p=3.$ ,  $p=3,5.$  ve  $p=4$  dereceden KÜK meta-modelleri birbirine yakın değer aldıkları görülmektedir. EHK'yi dikkate alırsak yine birbirlerine yakın değerlerdir. Böylece  $p=2.$ ,  $p=2,5.$ ,  $p=3.$ ,  $p=3,5.$  ve  $p=4.$  dereceden KÜK meta-modellerinden herhangi biri meta-model olarak seçilebilir. Burada en düşük değere sahip  $p=3.$  Dereceden KÜK meta-modelini seçilebilir.

Benzer şekilde model geçerliliğinde, 20 deneyli veri seti dikkate alındığında bütün meta-modeller birbirine çok yakın sonuçları vermektedir. 40 deneyli veri seti dikkate alındığında da bütün modeller birbirine yakın sonuçları vermektedir. Model geçerliliğinde tüm veri seti dikkate alındığında bütün modeller birbirine yakın sonuçları vermektedir.

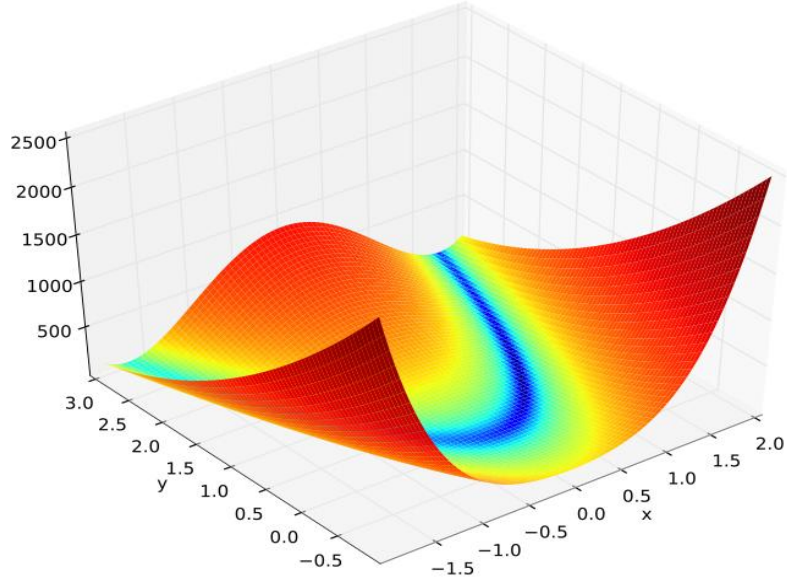
Geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 8 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Sonuç olarak Michaeliewicz fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^3$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritmalarda kullanılır.

## 5.9 Rosenbrock Fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Rosenbrock fonksiyonuna ait 3 boyutlu eniyileme problemi aşağıda (5.25) ve (5.26) numaralı eşitliklerde verilmiştir. Problemin en iyi çözümü  $f^*(1; 1; 1) = 0$ 'dır.

$$\text{Enk } f(x) = \sum_{i=1}^2 [100(x_{i+1} - x_i^2)^2 + (x_i - 1)^2] \quad (5.25)$$

$$-2 \leq x_i \leq 2, 1 \leq i \leq 3 \quad (5.26)$$



Şekil 5.48 Rosenbrock fonksiyonununun yüzey gösterimi

Rosenbrock fonksiyonu tekli genel en küçük çözüme sahiptir, dar, parabolik bir vadide yer alır. Çözümü zor bir problemdir.

### 5.9.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.18 36 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.18 Rosenbrock fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
1	8	14	2	-1,2000	-0,5143	-1,8857	851,3940
2	6	4	30	-1,4286	-1,6571	1,3143	1585,4600
3	33	27	17	1,6571	0,9714	-0,1714	439,7320
4	7	26	22	-1,3143	0,8571	0,4000	92,3038
5	26	18	29	0,8571	-0,0571	1,2000	207,0560
6	11	13	27	-0,8571	-0,6286	0,9714	225,1660
7	12	36	35	-0,7429	2,0000	1,8857	660,7760
8	13	9	15	-0,6286	-1,0857	-0,4000	475,5370
9	18	17	21	-0,0571	-0,1714	0,2857	12,1119
10	3	29	25	-1,7714	1,2000	0,7429	431,8900
11	17	23	23	-0,1714	0,5143	0,5143	31,3606
12	35	2	14	1,8857	-1,8857	-0,5143	4626,9000
13	20	22	33	0,1714	0,4000	1,6571	238,9260
14	25	12	7	0,7429	-0,7429	-1,3143	518,9680
15	5	7	32	-1,5429	-1,3143	1,5429	1380,3000



Çizelge 5.18 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
16	4	8	5	-1,6571	-1,2000	-1,5429	2458,8300
17	1	35	12	-2,0000	1,8857	-0,7429	2304,7500
18	21	15	10	0,2857	-0,4000	-0,9714	153,6800
19	15	32	26	-0,4000	1,5429	0,8571	425,5180
20	30	31	18	1,3143	1,4286	-0,0571	449,3520
21	14	10	20	-0,5143	-0,9714	0,1714	218,5650
22	24	11	9	0,6286	-0,8571	-1,0857	491,7870
23	34	1	16	1,7714	-2,0000	-0,2857	4486,1900
24	31	28	13	1,4286	1,0857	-0,6286	418,0630
25	19	33	4	0,0571	1,6571	-1,6571	2213,7300
26	9	3	8	-1,0857	-1,7714	-1,2000	2764,1900
27	28	16	34	1,0857	-0,2857	1,7714	501,6740
28	32	21	31	1,5429	0,2857	1,4286	621,0040
29	2	24	28	-1,8857	0,6286	1,0857	913,0960
30	22	25	11	0,4000	0,7429	-0,8571	232,9210
31	23	6	6	0,5143	-1,4286	-1,4286	1496,4400
32	27	19	24	0,9714	0,0571	0,6286	118,5840
33	16	20	36	-0,2857	0,1714	2,0000	391,4770
34	10	5	19	-0,9714	-1,5429	0,0571	1168,3900
35	36	30	1	2,0000	1,3143	-2,0000	2111,7200
36	29	34	3	1,2000	1,7714	-1,7714	2421,8300

### 5.9.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

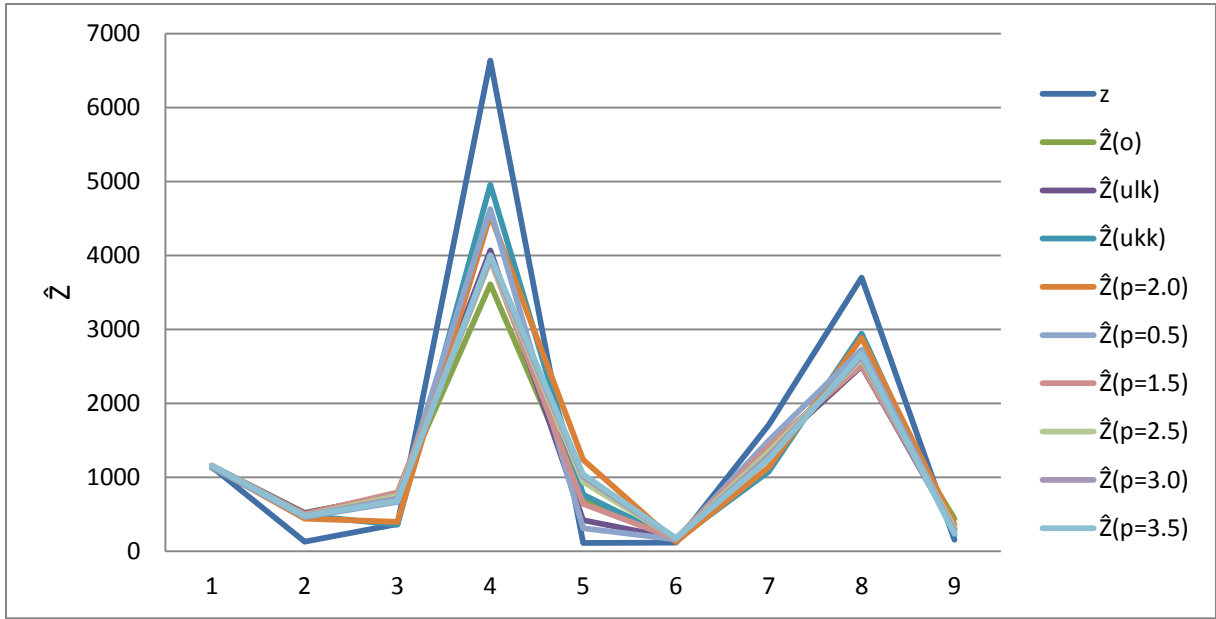
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.27) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Rosenbrock fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = \exp(-h/4,2) \quad (5.27)$$

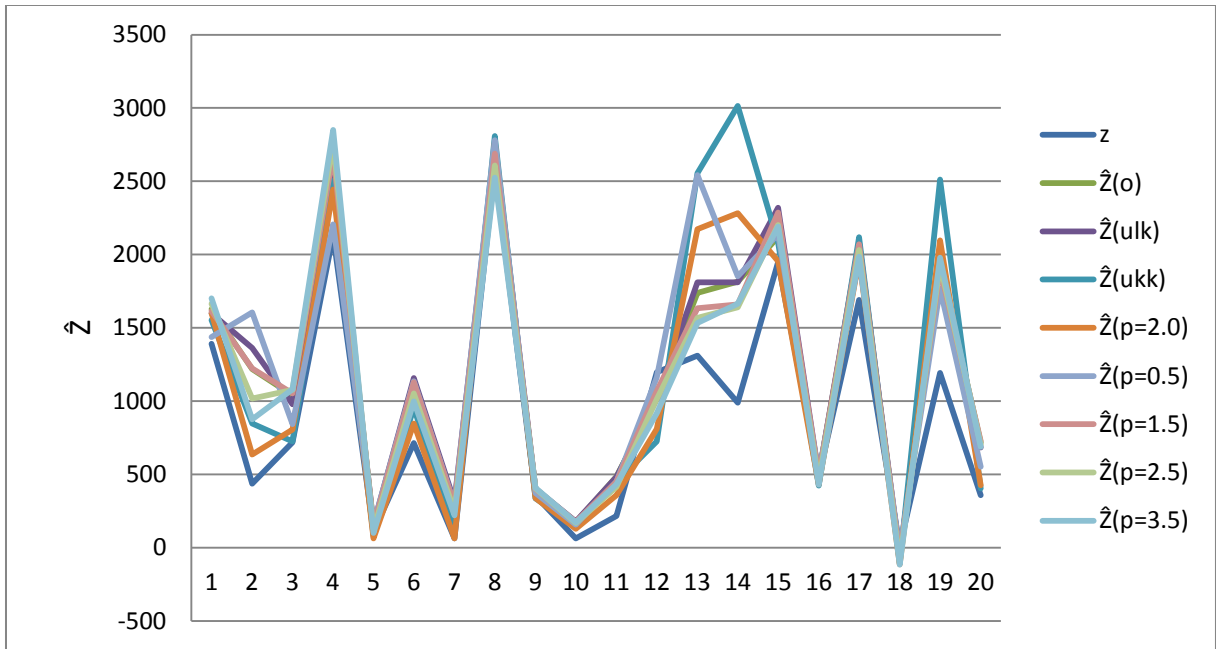
### 5.9.3 Kesirli Üniversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Kriging meta-modellerinin Rosenbrock fonksiyonu için geçerliliğinde 9, 20 ve 41 deneyden oluşan, model kurarken kullandığımız verilerden bağımsız LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır.

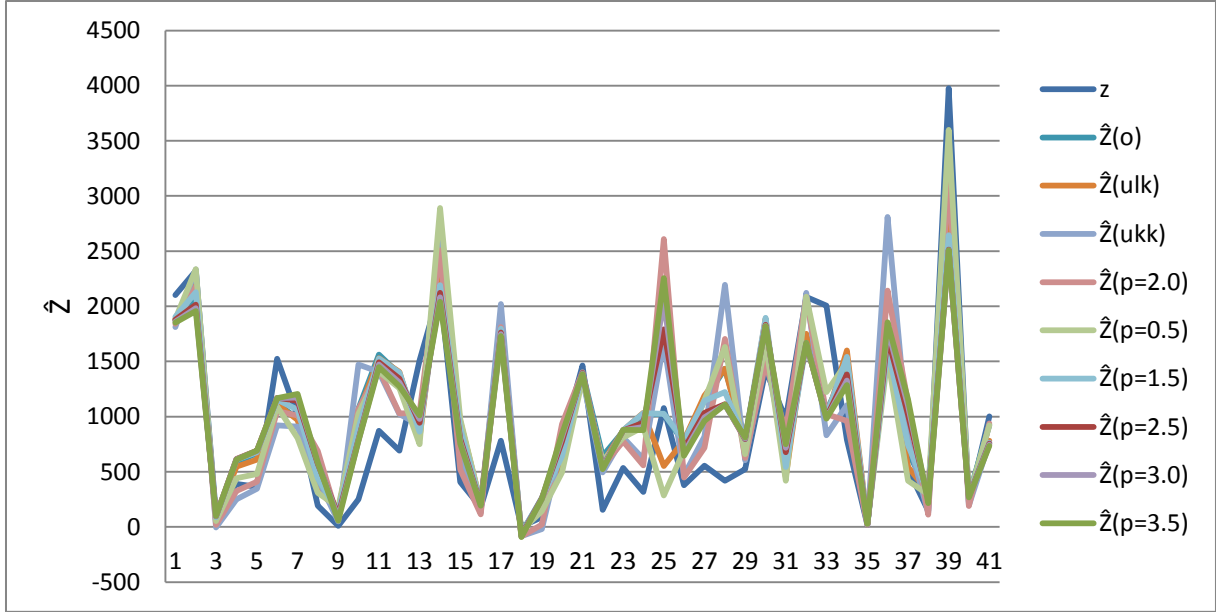
Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 5.49, 5.50 ve 5.51 ile verilmektedir.



Şekil 5.49 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=8)



Şekil 5.50 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=20)



Şekil 5.51 Rosenbrock fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

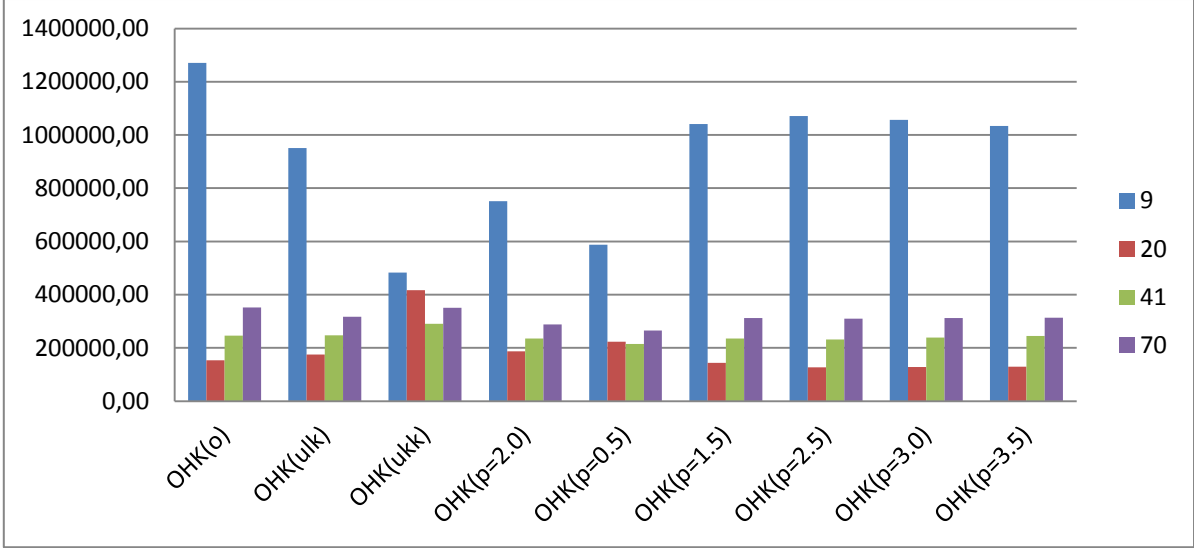
Grafikler incelendiğinde görsel olarak KÜK ve karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.9.4'e göre yapılır.

### 5.9.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

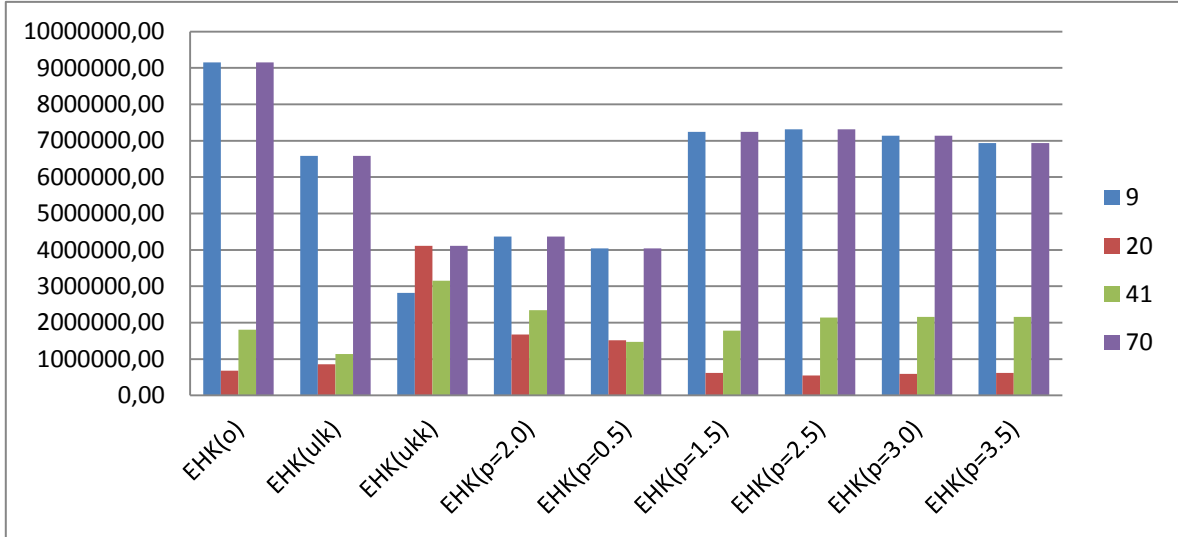
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=9, nv=20, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.19 ile verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=70) sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 5.19 Rosenbrockfonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=9	nv=20	nv=41	nv=70	nv=9	nv=20	nv=41	nv=70
OK	sabit		1270344	153472	245997	351263	9154074	681087	1804643	9154074
ÜK	doğrusal		950855	174565	246906	316745	6582970	857328	<b>1136313</b>	6582970
ÜK	karesel		<b>482937</b>	417300	290036	351199	<b>2816825</b>	4106256	3150164	4106256
KÜK	kesirli üslü	p=0,5	587718	223748	<b>215143</b>	<b>265504</b>	4037849	1517183	1467199	<b>4037849</b>
		p=1,5	1040857	143274	234988	312396	7244926	618582	1777796	7244926
		p=2	751232	187346	235470	288032	4363044	1672703	2345155	4363044
		p=2,5	1070744	<b>126829</b>	232020	309801	7311292	<b>552183</b>	2137795	7311292
		p=3	1056347	127633	238267	311839	7134562	592407	2157609	7134562
		p=3,5	1033879	129175	245164	313431	6933163	616822	2157138	6933163



Şekil 5.52 Rosenbrockfonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.53 Rosenbrock fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.52 ve 5.53 ile Rosenbrock fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır.

Model geçerliğinde 9 deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere karesel drift fonksiyonlu ÜK ve  $p=0,5$ . dereceden KÜK meta-modelleri birbirine yakın değer aldıkları görülmektedir. Benzer şekilde model geçerliğinde, 20 deneyli veri seti dikkate alındığında karesel drift fonksiyonlu ÜK modeli hariç tüm kriging meta-modelleri istatistiksel olarak yakın tahmin sonuçları

vermektedir. 41 deneyli veri seti dikkate alındığında  $p=0,5$ . dereceden KÜK meta-modeli daha kaliteli tahmin sonuçları vermektedir.

Model geçerliğinde tüm veri seti dikkate alınırsa  $p=0,5$ . ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelleri daha kaliteli tahmin sonuçları vermektedir. EHK dikkate alınırsa,  $p=0,5$ . ve  $p=2$ . dereceden KÜK meta-modelleri daha kaliteli tahmin sonuçları vermektedir.

Geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 9 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Sonuç olarak Rosenbrock fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^{0,5}$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritmalarda kullanılabilir.

## 5.10 Schwefel fonksiyonu

Jamil and Yang [69]'dan alınan Schwefel fonksiyonuna ait üç boyutlu eniyileme problemi aşağıda (5.28) ve (5.29) numaralı eşitliklerde verilmiştir. Problemin en iyi çözümü  $f^*(1; 1; 1) = 0$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = \sum_{i=2}^3 (x_i - 1)^2 + (x_1 - x_i^2)^2 \quad (5.28)$$

$$0 \leq x_i \leq 10, 1 \leq i \leq 3 \quad (5.29)$$

### 5.10.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.20 26 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.20 Schwefel fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
1	20	6	2	7,6	2	0,4	69,6736
2	25	7	1	9,6	2,4	0	109,866
3	15	4	18	5,6	1,2	6,8	1702,6
4	2	15	26	0,4	5,6	10	10980,8
5	11	25	13	4	9,6	4,8	8223,11
6	13	12	7	4,8	4,4	2,4	226,435

Çizelge 5.20 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
7	8	2	21	2,8	0,4	8	3801,77
8	5	14	15	1,6	5,2	5,6	1571,65
9	19	26	11	7,2	10	4	8779,28
10	26	24	8	10	9,2	2,8	5646,28
11	17	3	17	6,4	0,8	6,4	1256,77
12	6	13	10	2	4,8	3,6	584,003
13	21	20	3	8	7,6	0,8	2573,83
14	7	16	14	2,4	6	5,2	1778,73
15	9	10	25	3,2	3,6	9,6	8089,86
16	14	5	6	5,2	1,6	2	9,7696
17	24	18	16	9,2	6,8	6	2148,84
18	22	8	12	8,4	2,8	4,4	135,235
19	1	11	23	0	4	8,8	6322,79
20	18	19	4	6,8	7,2	1,2	2095,81
21	3	23	24	0,8	8,8	9,2	13030,9
22	10	17	19	3,6	6,4	7,2	3790,47
23	12	21	5	4,4	8	1,6	3604,91
24	16	9	9	6	3,2	3,2	45,6352
25	4	22	20	1,2	8,4	7,6	8108,16
26	23	1	22	8,8	0	8,4	3947,5

### 5.10.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

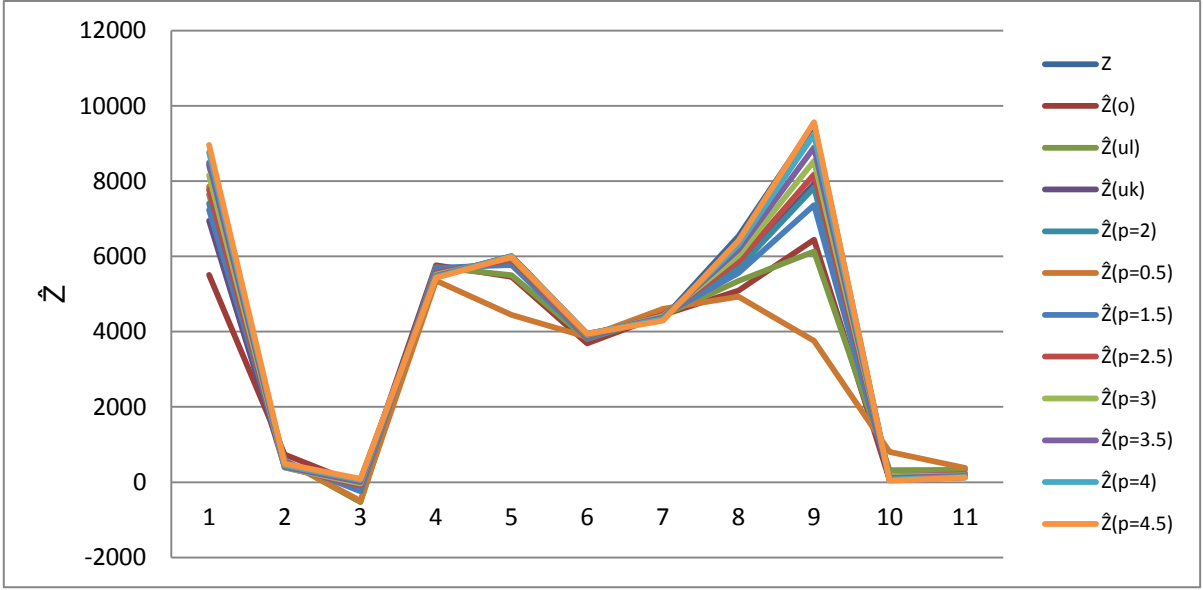
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.30) numaralı eşitlik ile verilen Gausyen korelogram modelinin Schwefel fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = \exp(-(h/7,8)^2) \quad (5.30)$$

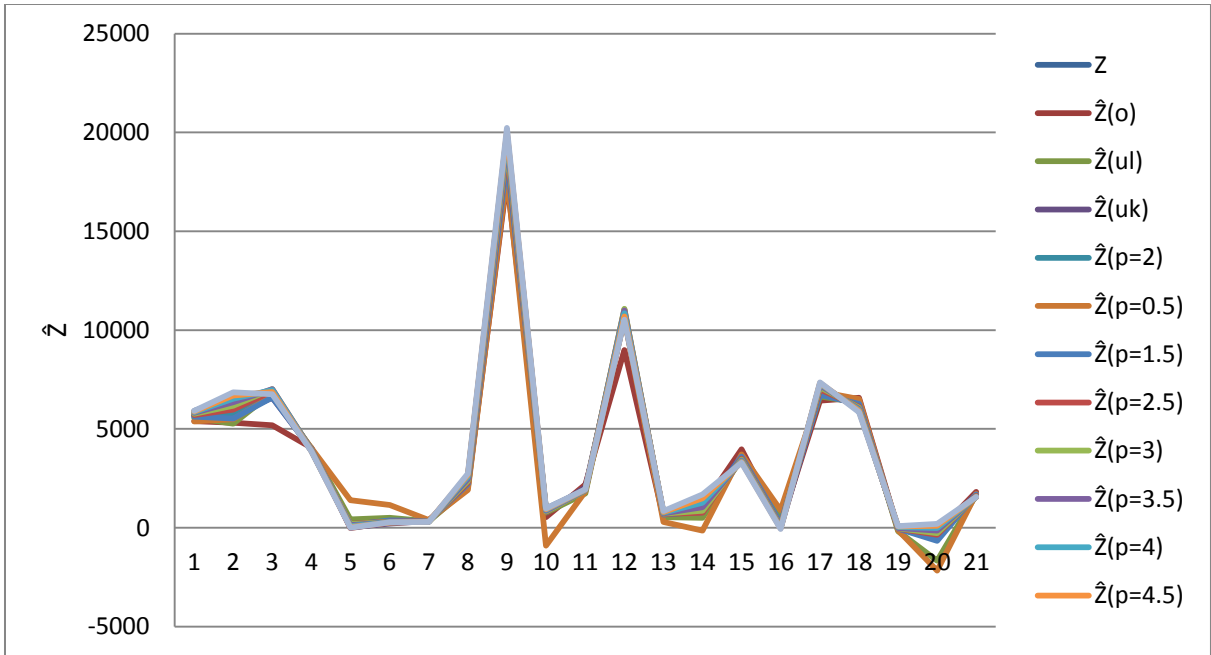
### 5.10.3 Kesirli Ünsiversal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Kriging meta-modellerinin Schwefel fonksiyonu için geçerliliğinde 11, 21 ve 41 deneyden oluşan, model kurarken kullandığımız verilerden bağımsız LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır.

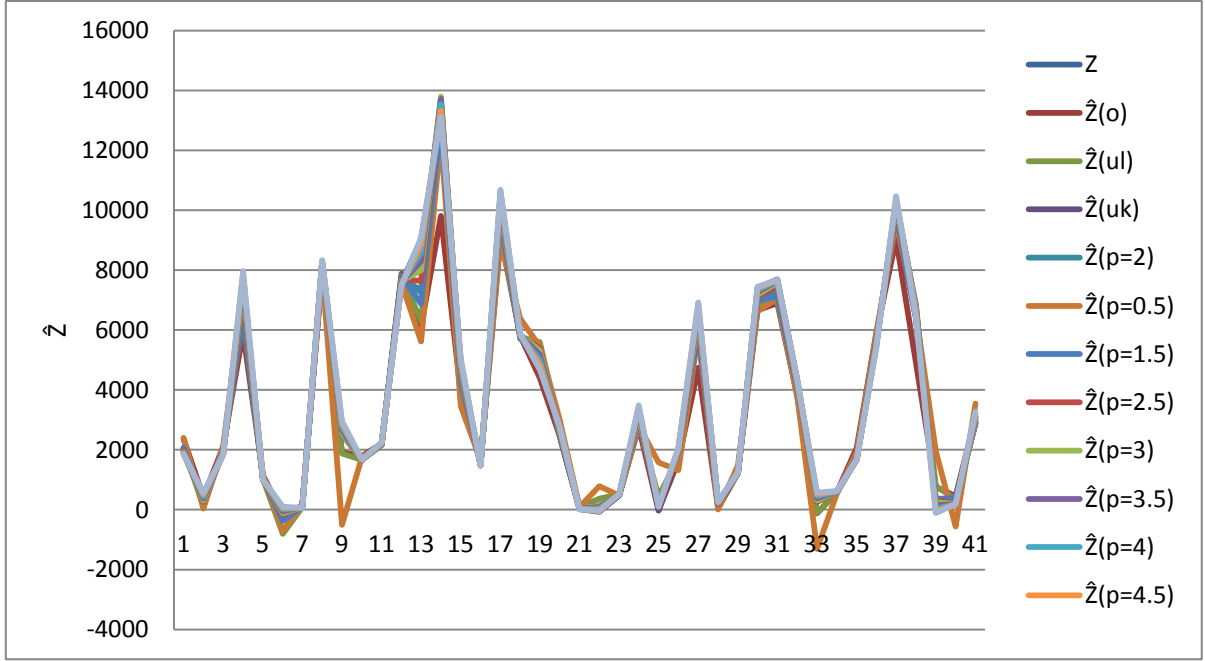
Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 5.54, 5.55 ve 5.56 ile verilmektedir.



Şekil 5.54 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11)



Şekil 5.55 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.56 Schwefel fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Grafikler incelendiğinde görsel olarak  $p=4$  ve  $p=4,5$ . dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.10.4'e göre yapılır.

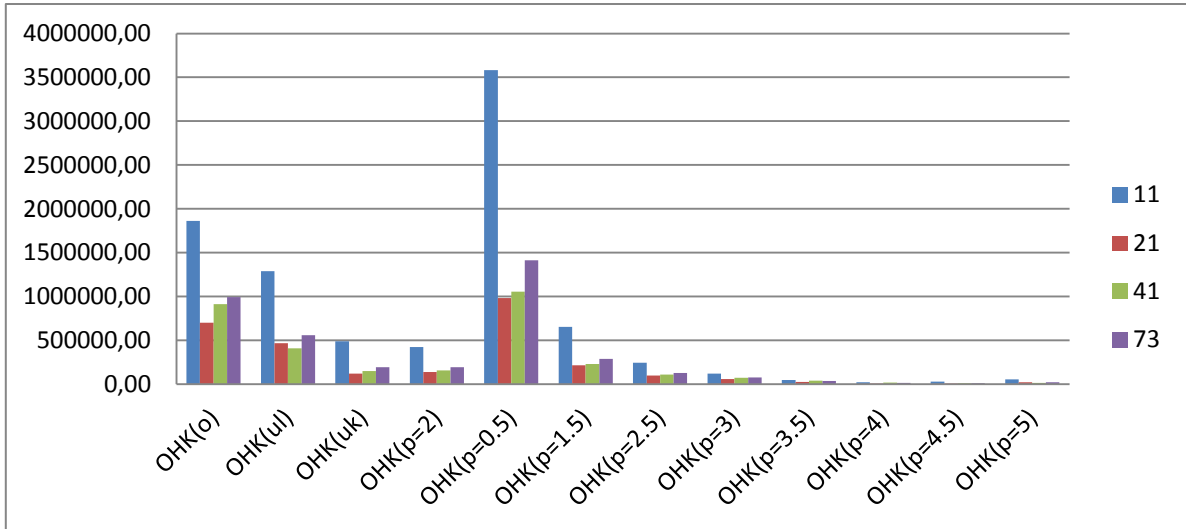
#### 5.10.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=11, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.21 ile verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=73) sonuçlar verilmiştir.

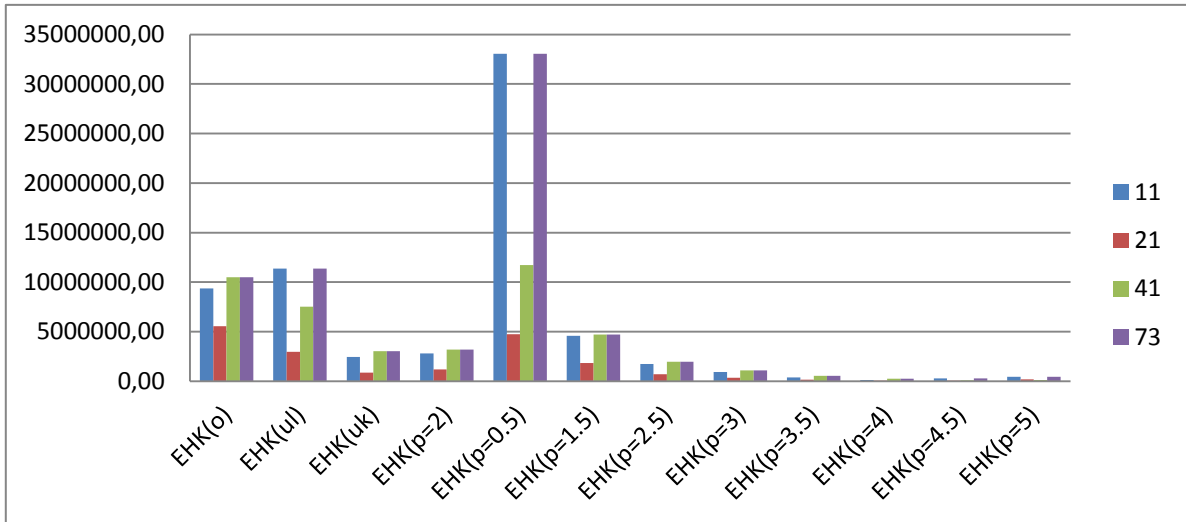
Çizelge 5.21 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
OK	sabit		1863077	699029	911658	993855	9361825	5568656	10501424	10501424
ÜK	doğrusal		1289078	467640	407956	557897	11357844	2961497	7510998	11357844
ÜK	karesel		487006	119371	148655	191215	2449225	874786	3029480	3029480
KÜK	kesirli üstü	p=0,5	3582168	981042	1052905	1413354	33047897	4750318	11737819	33047897
		p=1,5	651351	213646	230966	289329	4574936	1842535	4708683	4708683
		p=2	423987	138956	156229	191607	2800435	1199025	3197981	3197981
		p=2,5	245024	96599	108611	125711	1748477	702747	1969391	1969391
		p=3	118600	59514	70474	74573	938942	356648	1107862	1107862
		p=3,5	47092	26496	37758	35925	371868	173556	543670	543670
		p=4	<b>21725</b>	7214	16399	14559	<b>115961</b>	73875	244728	<b>244728</b>
		p=4,5	28863	<b>6202</b>	<b>8831</b>	<b>11093</b>	293753	<b>58346</b>	<b>79299</b>	293753





Şekil 5.57 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.58 Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.57 ve 5.58 ile Schwefel fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır.

Meta-modellerinin geçerliliği 11 deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere  $p=4$ . ve  $p=4,5$ . dereceden KÜK meta-modellerinin birbirine yakın değer aldıkları görülmektedir. EHK'yi dikkate alınırsa,  $p=4$ . ve  $p=4,5$ . dereceden KÜK meta-modelleri arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna ulaşılır. Bu iki meta-modelden EHK'ye göre en küçük değere sahip  $p=4$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir.

Benzer şekilde 21 deneyli veri seti dikkate alındığında p=4,5. ve p=4. dereceden KÜK meta-modelleri yaklaşık aynı sonuçları vermektedir. 41 deneyli veri seti dikkate alındığında p=4,5. dereceden KÜK meta-modeli daha iyi sonuç vermektedir.

Tüm veri seti (nv=73) dikkate alındığında p=4,5. ve p=4. dereceden KÜK meta-modelleri arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varılır. Bu iki modelden EHK'ye göre en küçük değere sahip p=4. dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir.

Geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 11 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Sonuç olarak Schwefel fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^4$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritmalarda kullanılabilir.

### 5.11 Ishigami Fonksiyonu

Ishigami ve Homma [71]'dan alınan Ishigami fonksiyonuna ait 3 boyutlu eniyileme problemi aşağıda (5.31) ve (5.32) numaralı eşitliklerde verilmiştir. Problemin en iyi çözümü  $f^*(1; 1; 1) = 0$ 'dir.

$$\text{Enk } f(x) = \sin(x_1) + 0.7\sin^2(x_2) + 0.1x_3^2\sin(x_1) \quad (5.31)$$

$$-\pi \leq x_i \leq \pi, \quad 1 \leq i \leq 3 \quad (5.32)$$

Ishigami fonksiyonu belirsizlik ve duyarlılık analiz yöntemleri için örnek olarak kullanılan doğrusal ve monoton olmayan bir yapıdadır.

#### 5.11.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.22 28 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.22 Ishigami fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney No	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
1	26	16	12	2,6762	0,3491	-0,5818	1,2728
2	18	10	1	0,8145	-1,0472	-3,1416	13,0627
3	2	9	17	-2,9089	-1,2799	0,5818	6,1910

Çizelge 5.22 devam ediyor

Deney No	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
4	23	1	19	1,9780	-3,1416	1,0472	1,0286
5	12	17	27	-0,5818	0,5818	2,9089	-2,3702
6	20	24	14	1,2799	2,2108	-0,1164	5,4618
7	16	13	18	0,3491	-0,3491	0,8145	1,1759
8	5	21	6	-2,2108	1,5126	-1,9780	4,9463
9	28	12	26	3,1416	-0,5818	2,6762	2,1137
10	10	22	2	-1,0472	1,7453	-2,9089	-0,2777
11	6	23	16	-1,9780	1,9780	0,3491	4,9823
12	11	2	21	-0,8145	-2,9089	1,5126	-0,7359
13	19	28	22	1,0472	3,1416	1,7453	1,6696
14	22	18	11	1,7453	0,8145	-0,8145	4,7317
15	15	5	7	0,1164	-2,2108	-1,7453	4,7276
16	4	3	9	-2,4435	-2,6762	-1,2799	0,5947
17	3	20	25	-2,6762	1,2799	2,4435	4,3756
18	14	6	5	-0,1164	-1,9780	-2,2108	5,5084
19	7	25	23	-1,7453	2,4435	1,9780	0,3998
20	27	11	8	2,9089	-0,8145	-1,5126	4,0549
21	13	8	15	-0,3491	-1,5126	0,1164	6,6343
22	9	15	3	-1,2799	0,1164	-2,6762	-5,7774
23	25	4	24	2,4435	-2,4435	2,2108	5,0704
24	24	19	4	2,2108	1,0472	-2,4435	8,9114
25	1	7	20	-3,1416	-1,7453	1,2799	6,7889
26	8	27	10	-1,5126	2,9089	-1,0472	-0,7461
27	21	14	28	1,5126	-0,1164	3,1416	10,8171
28	17	26	13	0,5818	2,6762	-0,3491	1,9603

### 5.11.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

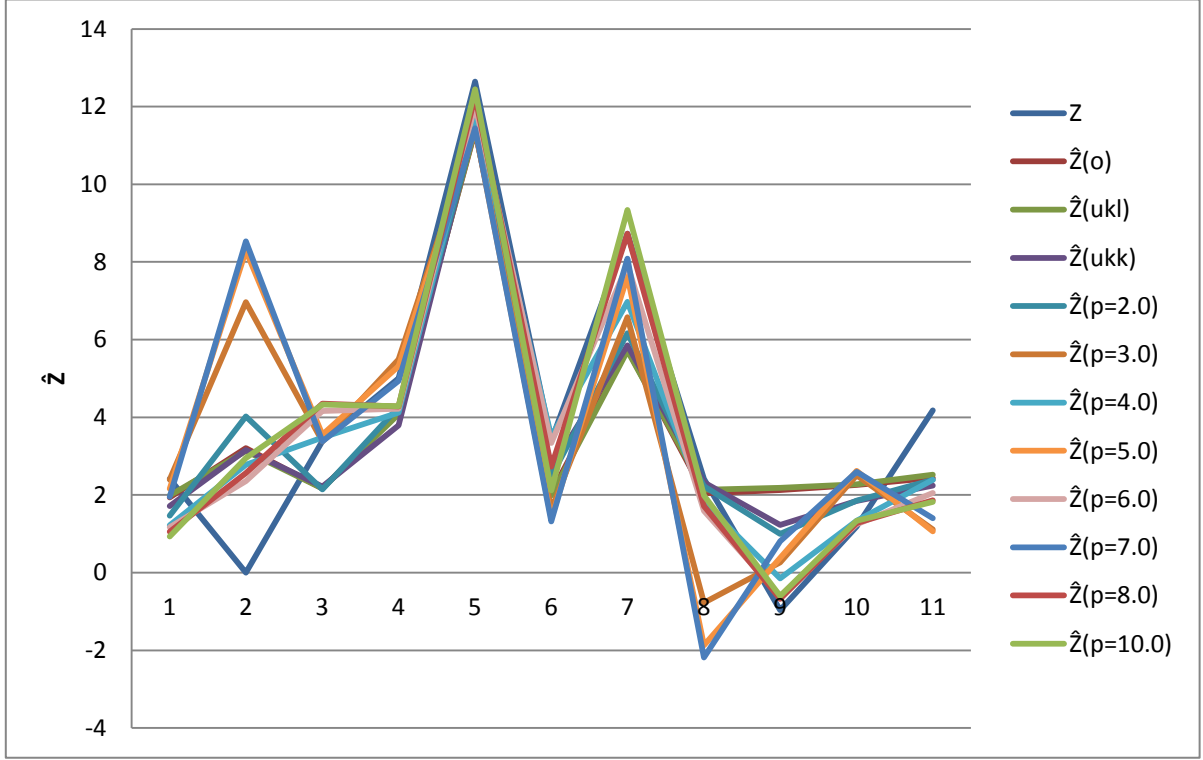
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.33) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Ishigami fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = xp \left( -\frac{h}{6,98} \right) \quad (5.33)$$

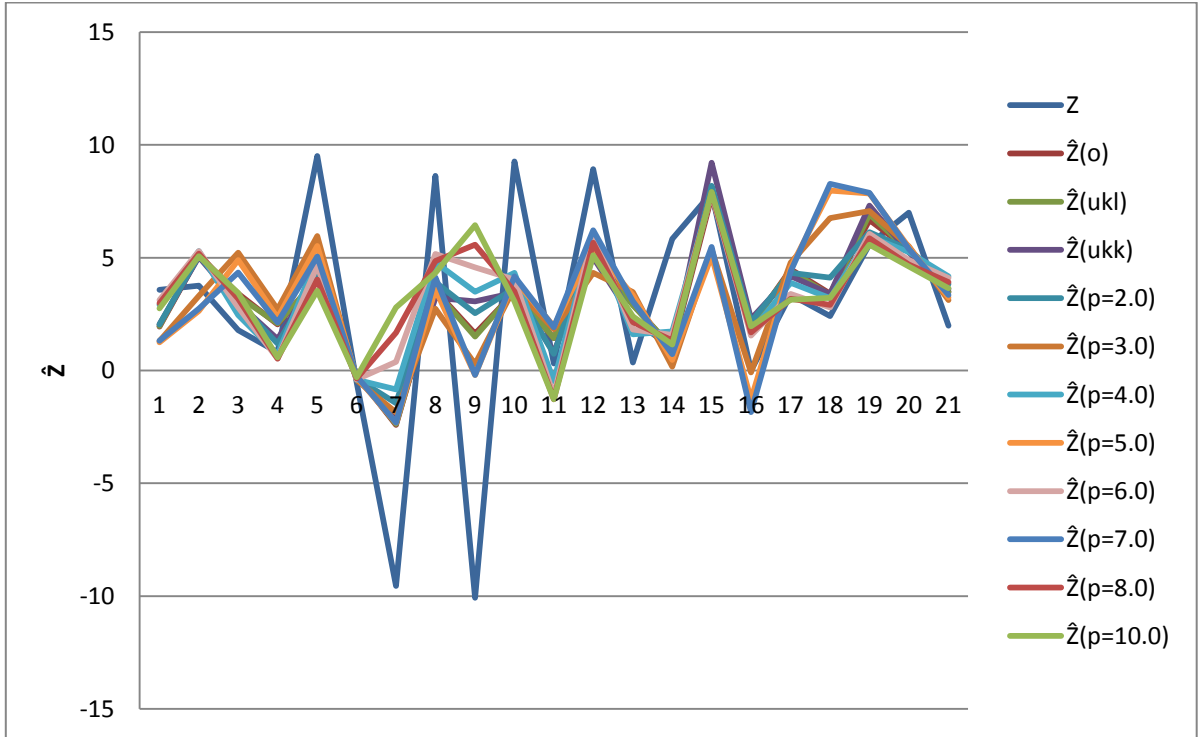
### 5.11.3 Kesirli Ünserval Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Kriging meta-modellerinin Ishigami fonksiyonu için geçerliliğinde 11, 21 ve 41 deneyden oluşan, model kurarken kullandığımız verilerden bağımsız LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır.

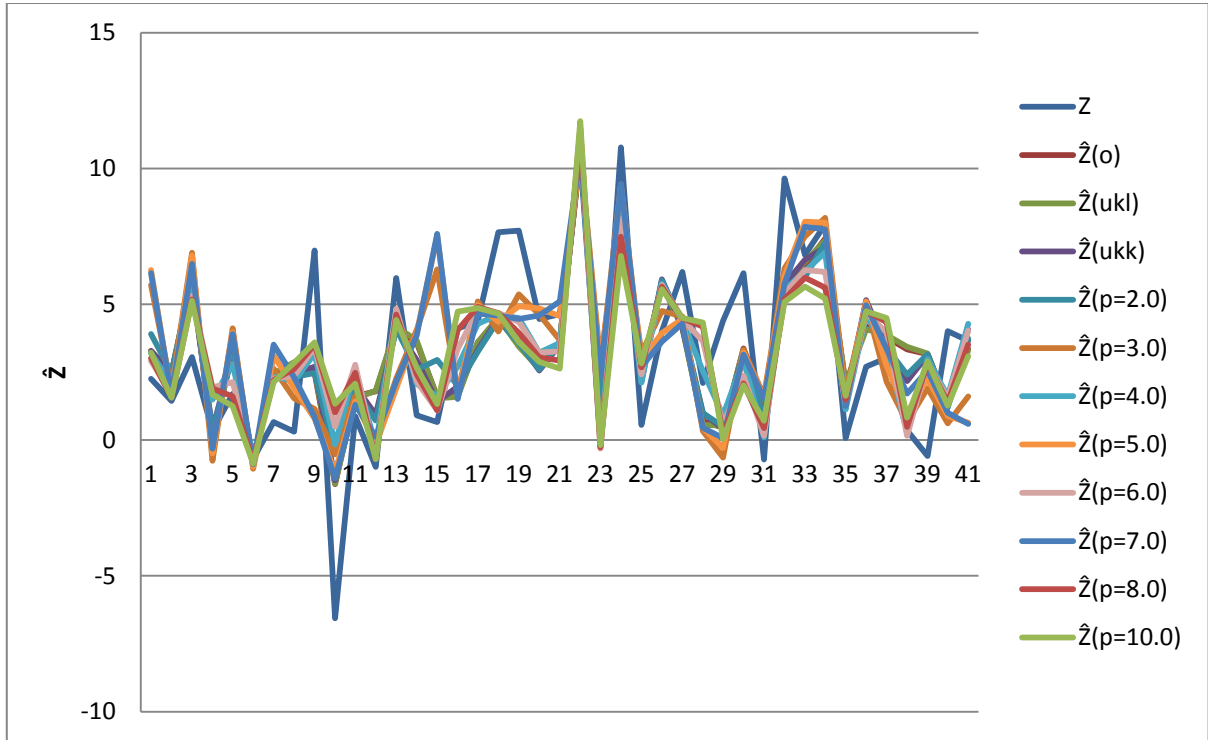
Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 5.59, 5.60 ve 5.61 ile verilmektedir.



Şekil 5.59 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11)



Şekil 5.60 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.61 Ishigami fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Grafikler incelendiğinde görsel olarak p=6., p=8. ve p=4. dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.11.4'e göre yapılır.

#### 5.11.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

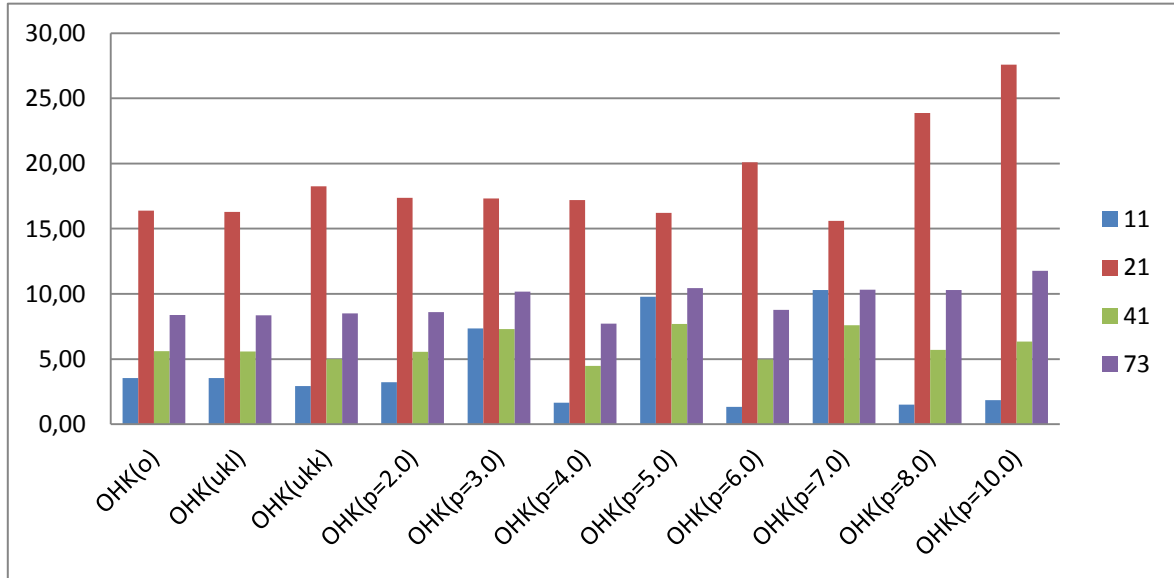
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=11, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.23'te verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=73) sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 5.23 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

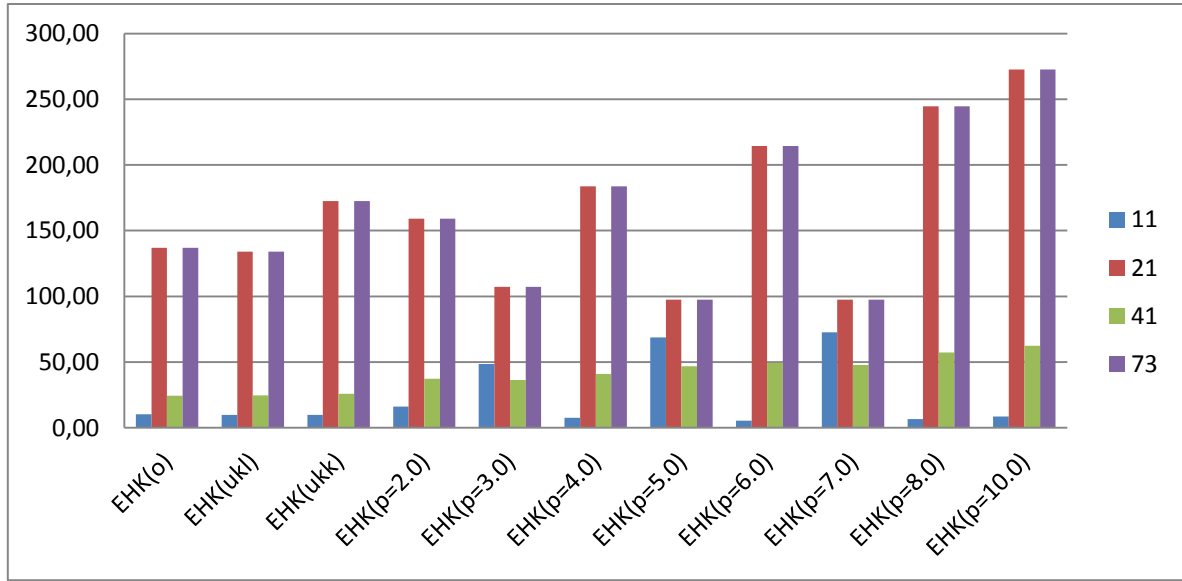
Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
OK	sabit		3,54	16,37	5,60	8,39	10,30	136,87	<b>24,36</b>	136,87
ÜK	doğrusal		3,53	16,27	5,58	8,35	9,90	134,01	24,65	134,01
ÜK	karesel		2,94	18,26	4,99	8,49	9,95	172,46	25,79	172,46

Çizelge 5.23 devam ediyor

Model	Drift fonksiyonu	OHK				EHK				
		nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	
KÜK	kesirli üslü	p=2	3,23	17,38	5,56	8,61	16,20	159,16	37,35	159,16
		p=3	7,34	17,32	7,29	10,18	48,47	107,28	36,41	107,28
		p=4	1,64	17,20	<b>4,47</b>	<b>7,71</b>	7,72	183,74	40,97	183,74
		p=5	9,78	16,21	7,68	10,45	68,71	97,54	46,82	<b>97,54</b>
		p=6	<b>1,34</b>	20,08	4,96	8,76	<b>5,55</b>	214,31	49,58	214,31
		p=7	10,30	<b>15,61</b>	7,60	10,31	72,79	<b>97,51</b>	47,94	97,51
		p=8	1,49	23,86	5,70	10,29	6,56	244,63	57,44	244,63
		p=9	1,84	27,57	6,33	11,77	8,68	272,68	62,38	272,68



Şekil 5.62 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları (OHK)



5.63 Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.62 ve 5.63 ile Ishigami fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır. Model geçerliliğinde 11 deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında sırasıyla en küçükten başlamak üzere p=6. ve p=8. dereceden KÜK meta-modellerinin birbirine yakın değer aldıkları görülmektedir. EHK dikkate alınır, p=6. ve p=8. dereceden KÜK meta-modelleri arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varılır. Bu iki modelden EHK'ya göre en küçük değere sahip p=6. dereceden KÜK meta-modeli seçilebilir. Benzer şekilde, 21 deneyli veri seti dikkate alındığında p=7. ve p=5. dereceden KÜK meta-modelleri yaklaşık aynı sonuçları vermektedir. 41 deneyli veri seti dikkate alındığında p=4. ve p=6. dereceden KÜK meta-modelleri daha kaliteli sonuç vermektedir.

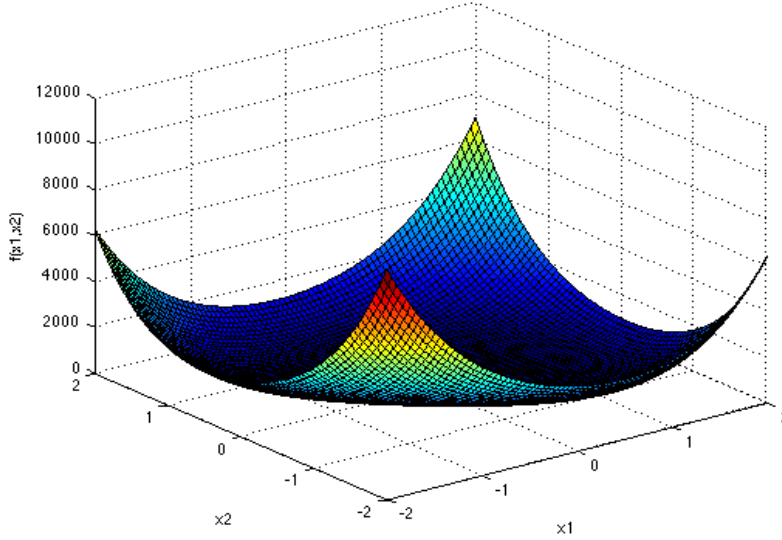
Tüm veri seti (nv=73) dikkate alındığında p=4. ve p=6. dereceden KÜK meta-modelleri arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varılır.

Geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 11 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Sonuç olarak Ishigami fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^6$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritmalarda kullanılabilir.

## 5.12 Perm 0, d, $\beta$ fonksiyonu

$$\text{Enk } f(x) = \sum_{i=1}^k (\sum_{j=1}^k (j + \beta) (x_j^i - \frac{1}{j}))^2 \quad (5.34)$$

$$-k \leq x_i \leq k, 1 \leq i \leq k \quad (5.35)$$



Şekil 5.64 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonunun yüzey gösterimi

(5.34) ve (5.35) numaralı fonksiyonda  $k=3$  ve  $\beta=10$  olarak ele alınmıştır. Perm fonksiyonu çanak şekillidir ve birçok yerel ancak bir genel enküçük çözüme sahiptir.

### 5.12.1 Deney Tasarımı ile Veri Setinin Üretilmesi

Çizelge 5.24, 28 deney noktasını içeren LHT sonuçları için rassal sıralamayı göstermektedir.

Çizelge 5.24 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu için LHT sonuçları

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
1	26	16	12	2,556	0,333	-0,556	32326,0
2	18	10	1	0,778	-1,000	-3,000	156015,0
3	2	9	17	-2,778	-1,222	0,556	83923,7
4	23	1	19	1,889	-3,000	1,000	83946,9
5	12	17	27	-0,556	0,556	2,778	79355,3
6	20	24	14	1,222	2,111	-0,111	17637,9
7	16	13	18	0,333	-0,333	0,778	206,4
8	5	21	6	-2,111	1,444	-1,889	41904,8
9	28	12	26	3,000	-0,556	2,556	280032,0



Çizelge 5.24 devam ediyor

Deney Sırası	D1	D2	D3	x1	x2	x3	Z
10	10	22	2	-1,000	1,667	-2,778	80078,0
11	6	23	16	-1,889	1,889	0,333	4893,9
12	11	2	21	-0,778	-2,778	1,444	70061,0
13	19	28	22	1,000	3,000	1,667	167827,0
14	22	18	11	1,667	0,778	-0,778	2332,7
15	15	5	7	0,111	-2,111	-1,667	44639,2
16	4	3	9	-2,333	-2,556	-1,222	170914,0
17	3	20	25	-2,556	1,222	2,333	21163,9
18	14	6	5	-0,111	-1,889	-2,111	59316,3
19	7	25	23	-1,667	2,333	1,889	47279,7
20	27	11	8	2,778	-0,778	-1,444	42804,9
21	13	8	15	-0,333	-1,444	0,111	4246,1
22	9	15	3	-1,222	0,111	-2,556	74356,1
23	25	4	24	2,333	-2,333	2,111	37480,1
24	24	19	4	2,111	1,000	-2,333	17732,5
25	1	7	20	-3,000	-1,667	1,222	138824,0
26	8	27	10	-1,444	2,778	-1,000	52308,0
27	21	14	28	1,444	-0,111	3,000	154331,0
28	17	26	13	0,556	2,556	-0,333	40324,4

### 5.12.2 Korelogram Modelinin Belirlenmesi

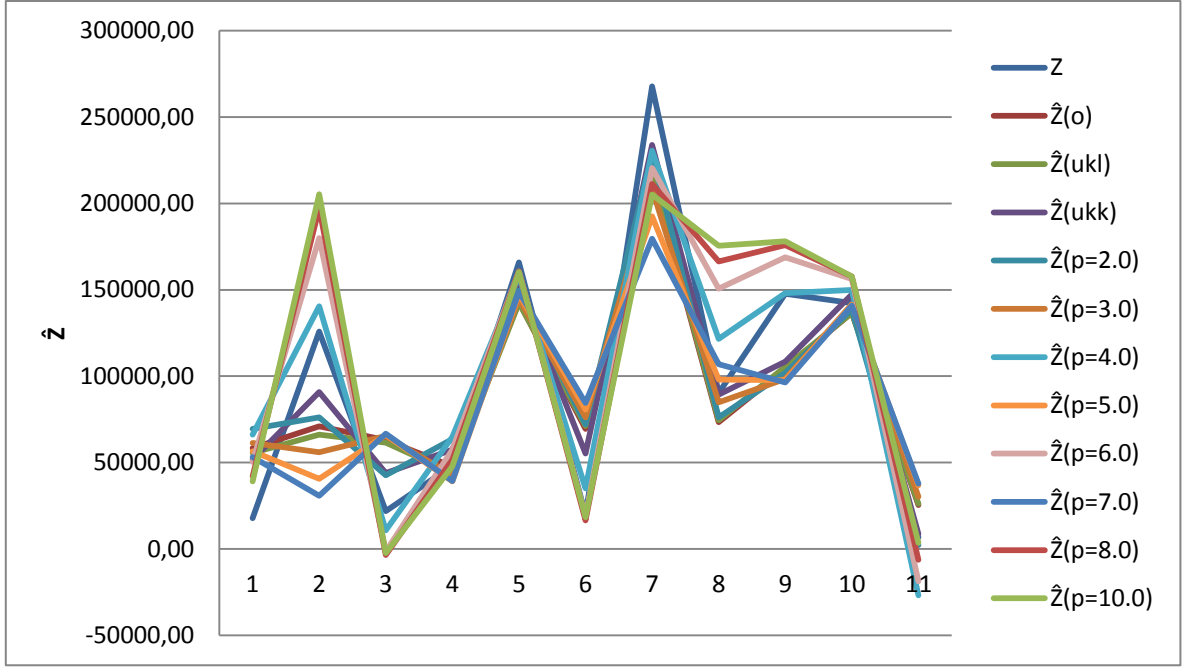
Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (5.36) numaralı eşitlik ile verilen üstel korelogram modelinin Perm fonksiyonu için uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = xp \left( -\frac{h}{6,19} \right) \quad (5.36)$$

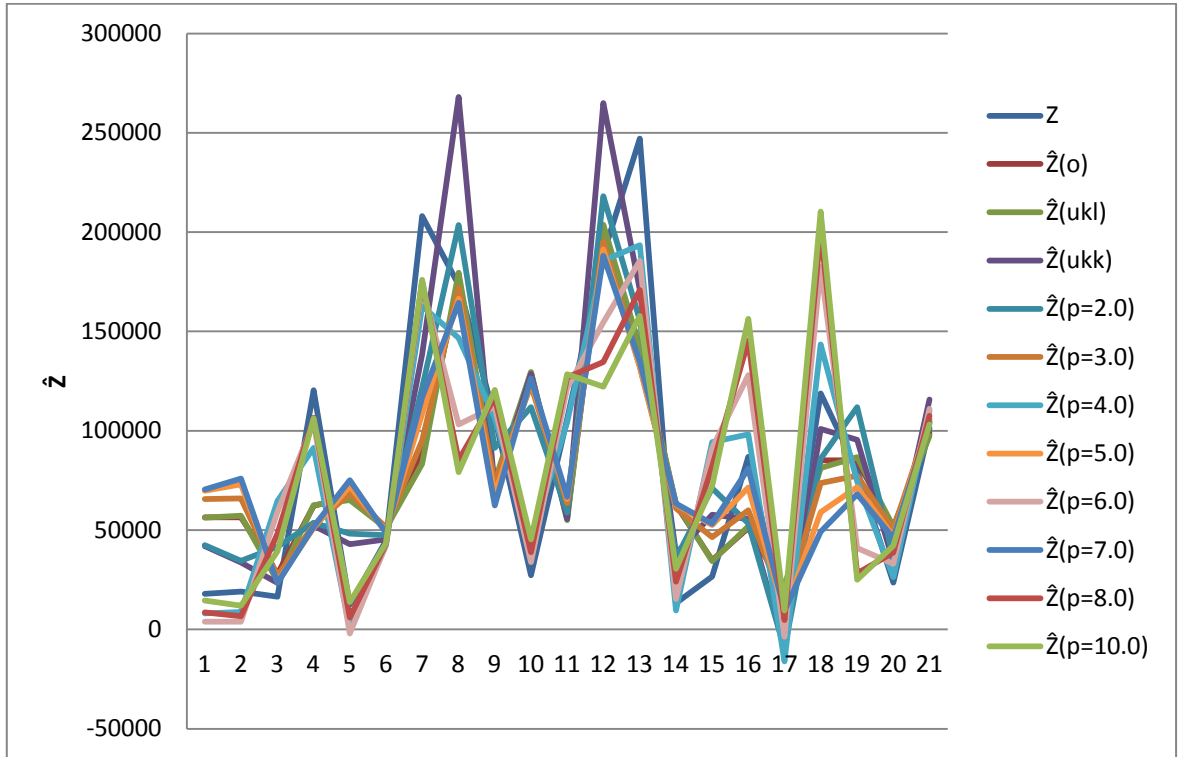
### 5.12.3 Kesirli Ünsersal Kriging Meta-Modelinin Geçerliliği

Kriging meta-modellerinin Ishigami fonksiyonu için geçerliliğinde 11, 21 ve 41 deneyden oluşan, model kurarken kullandığımız verilerden bağımsız LHT ile elde edilen üç ayrı veri seti kullanılmıştır.

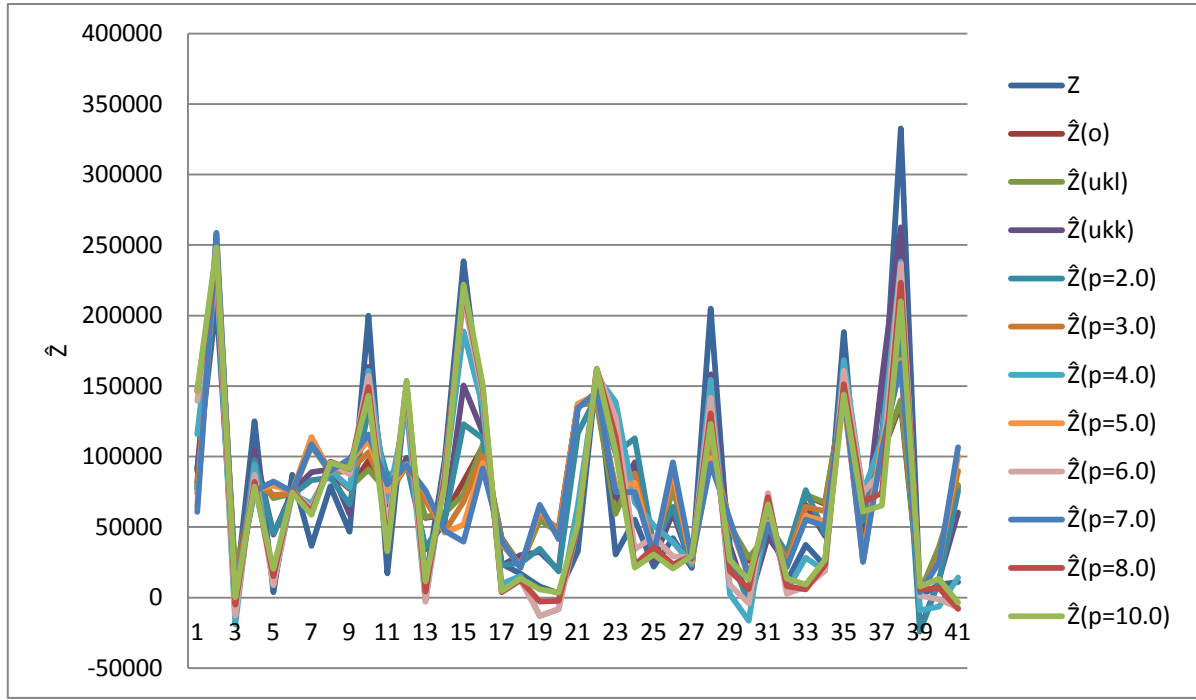
Üç ayrı veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 5.65, 5.66 ve 5.67 ile verilmektedir.



Şekil 5.65 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=11)



Şekil 5.66 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=21)



Şekil 5.67 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu kriging meta-modellerinin tahmin değerleri (nv=41)

Grafikler incelendiğinde görsel olarak p=4. ve p=6. dereceden KÜK meta-modellerin daha uygun olduğu gözlenmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 5.12.4'e göre yapılır.

#### 5.12.4 Uygun Kriging Meta-Modelinin Seçilmesi

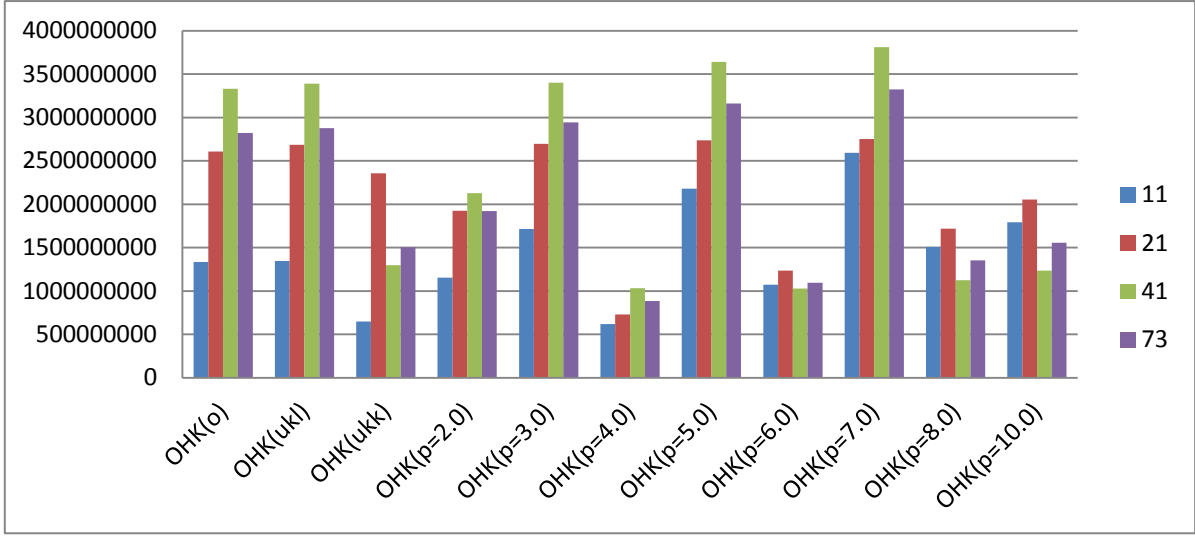
Meta-model geçerliliği üç farklı büyüklükteki veri seti (nv=11, nv=21, nv=41) için incelenmiştir. Başarımları Çizelge 5.25'te verilmiştir. Son sütunda üç veri seti birlikte dikkate alınarak (nv=73) sonuçlar verilmiştir.

Çizelge 5.25 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımları

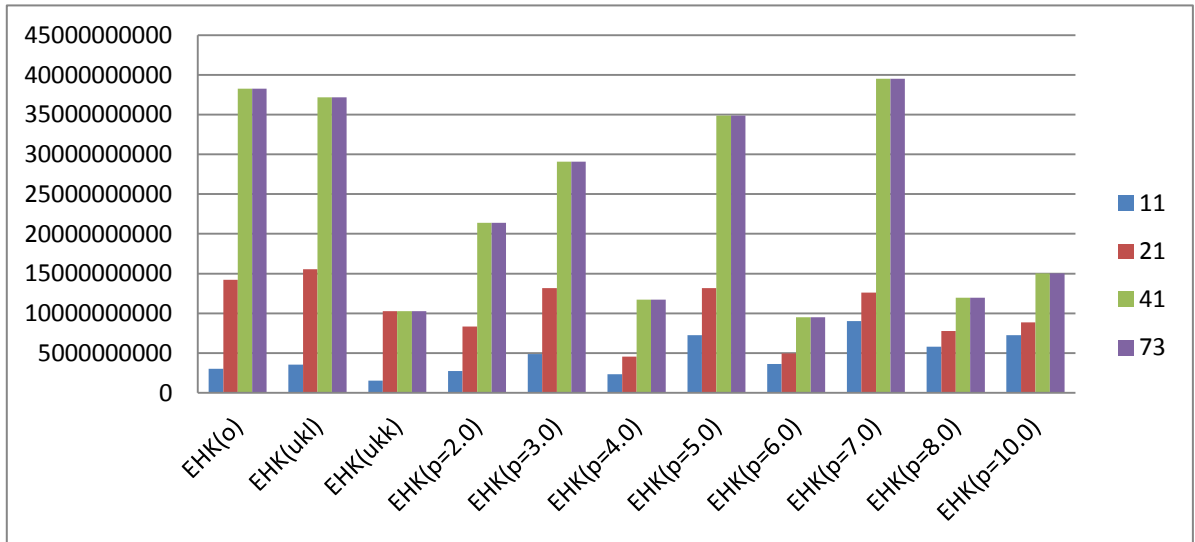
Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
OK	sabit		1334278272	2605816872	3329873108	2820876887	3017458706	14231273166	38258968801	38258968801
ÜK	doğrusal		1345524854	2684769850	3388121422	2877998884	3565511002	15531490325	37151020516	37151020516
ÜK	karesel		648262267	2357111496	1297443171	1504457484	1542918400	10290357634	10292670628	10292670628
KÜK	kesirli üslü	p=2	1152647918	1924298648	2127571897	1922189678	2746986297	8338611856	21372100864	21372100864
		p=3	1714276232	2695980417	3400187529	2943565973	4873910820	13193279044	29071886823	29071886823
		p=4	<b>617834320</b>	<b>730207091</b>	<b>1031722717</b>	<b>882618601</b>	<b>2349660813</b>	<b>4568881242</b>	11709923514	11709923514
		p=5	2180959936	2735895470	3641114555	3160685766	7268108110	13190752201	34893007131	34893007131
		p=6	1073217221	1233201785	1027275889	1093437512	3650129306	4950529600	<b>9498334648</b>	<b>9498334648</b>

Çizelge 5.25 devam ediyor

Model	Drift fonksiyonu		OHK				EHK			
			nv=11	nv=21	nv=41	nv=73	nv=11	nv=21	nv=41	nv=73
KÜK	kesirli üslü	p=7	2594103005	2750724576	3809301571	3321667309	9030377801	12599613504	39517980956	39517980956
		p=8	1508054653	1718854955	1125608857	1353897512	5813498264	7785203462	11978645809	11978645809
		p=10	1793474713	2054285510	1234233761	1554408243	7274435274	8878784065	15038607424	15038607424



Şekil 5.68 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (OHK)



Şekil 5.69 Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu için kriging meta-modellerinin başarımı (EHK)

Şekil 5.68 ve 5.69 ile Perm 0, d,  $\beta$  fonksiyonu için kriging meta-modellerinin geçerliliği üç farklı veri seti büyüklüğüne göre başarımları karşılaştırılmıştır.

Model geçerliliğinde 11 deneyli veri setine göre OHK dikkate alındığında en küçük değere sahip  $p=4$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilir. Benzer şekilde model doğrulamada, 21 deneyli veri seti dikkate alındığında  $p=4$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilir. 41 deneyli veri seti dikkate alındığında  $p=4$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilir. Tüm veri seti ( $n_v=73$ ) dikkate alındığında ise  $p=4$ . dereceden KÜK meta-modeli seçilir.

Geçerlik işlemi için az sayıda deney sayısının kullanılması maliyeti azaltacağından 11 deneyli veri setinin yeterli olduğu görülmektedir. Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri sayısının artması sonucu değiştirmemektedir. Sonuç olarak Perm fonksiyonu için  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^4$  'e sahip KÜK meta-modeli eniyileme amacıyla uygun algoritmalarda kullanılabilir.

### **5.13 Kesirli Üniversal Kriging Meta-modelinin Genel Değerlendirilmesi**

Kriging modellerinin meta-model olarak kullanılabilirliği incelenerek bu tezde kesirli drift fonksiyonuna sahip kesirli üniversal kriging (KÜK) meta-modeli geliştirilerek önerilmiştir. Önerilen KÜK meta-modelinin literatürdeki kriging meta-modelleri ile karşılaştırılması 12 TF üzerinde gerçekleştirilmiştir. Her bir TF için KÜK meta-modeli geliştirme ve geçerlilik aşamaları 5.1 ile 5.12 arasındaki bölümlerde sırasıyla verilmiştir.

Benzetim ve BE alanında yapılan araştırmalarda çözüm maliyetinin azaltılması amacıyla az sayıda deney ile çözüme ulaşılmak istenir. Bu nedenle de istatistiksel deney tasarımından büyük ölçüde yararlanır.

Bu tezde önerilen KÜK meta-modelinin geçerliliği incelenmiş, geçerlilik için kullanılan veri seti büyüklüğünün değişmesiyle, doğal olarak OHK ve EHK'nın büyümesine rağmen, seçilen meta-modellerin değişmediği gözlenmiştir. Dolayısıyla Çizelge 5.26 ile verilen deney sayısının geçerlilik için yeterli olacağı sonucuna varılmıştır.

Çizelge 5.26 KÜK meta-modeline göre diğer kriging meta-modellerinin OHK'lardaki sapma oranı (1)

Fonksiyon Adı	Girdi Değişkeni Sayısı	Deney Sayısı	Model geçerliliği için deney sayısı	KÜK Kesirli üs (p)	(OHK <sub>m</sub> -OHK <sub>k</sub> )/OHK <sub>k</sub> *100		
					OK	ÜK (doğrusal drift)	ÜK (karesel drift)
<b>İki Değişkenli Test Fonksiyonları</b>							
Adjiman Fonksiyonu	2	26	9	6	29	458	632
Deckkers-Aarts Fonksiyonu	2	26	11	2	104450	105005	10
Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu	2	26	9	8	31968	18003	9907
Styblinski–Tang fonksiyonu	2	26	9	6	2925	3171	1370
Zettl fonksiyonu	2	26	9	2	3992	3602	23
Shubert Fonksiyonu	2	26	11	5	8	8	23
<b>Üç Değişkenli Test Fonksiyonları</b>							
Styblinski–Tang fonksiyonu	3	25	9	8	2085	2060	1732
Michaelwicz fonksiyonu	3	25	8	3	477	20	214
Rosenbrock fonksiyonu	3	36	9	0,5	163	97	0
Schwefel fonksiyonu	3	26	11	4	8476	5834	2142
Isıgamil fonksiyonu	3	28	11	6	165	165	120
Perm fonksiyonu	3	28	11	4	116	118	5

Çizelge 5.27 KÜK meta-modeline göre diğer kriging meta-modellerinin OHK'lardaki sapma oranı (2)

Fonksiyon Adı	Girdi Değişkeni Sayısı	Deney Sayısı	Model geçerliliği için deney sayısı	KÜK Kesirli üs (p)	(OHK <sub>m</sub> -OHK <sub>k</sub> )/OHK <sub>k</sub> *100		
					OK	ÜK (doğrusal drift)	ÜK (karesel drift)
<b>İki Değişkenli Test Fonksiyonları</b>							
Adjiman Fonksiyonu	2	26	71	6	0	2438	3261
Deckkers-Aarts Fonksiyonu	2	26	73	2	16226	16224	0
Altı hörgüçlü deve sırtı fonksiyonu	2	26	71	8	14185	9552	6875
Styblinski–Tang fonksiyonu	2	26	71	6	3953	3912	2388
Zettl fonksiyonu	2	26	71	2	194445	160684	560
Shubert Fonksiyonu	2	26	73	2	0	1	6
<b>Üç Değişkenli Test Fonksiyonları</b>							
Styblinski–Tang fonksiyonu	3	25	71	8	1144	1175	1355
Michaelwicz fonksiyonu	3	25	68	3	4	5	0
Rosenbrock fonksiyonu	3	36	70	0,5	32	19	32
Schwefel fonksiyonu	3	26	73	4	6726	3732	1213
Isıgami fonksiyonu	3	28	73	4	9	8	10
Perm fonksiyonu	3	28	73	4	220	226	70

Tüm TF'ler için seçilen KÜK meta-modellerinin diğer kriging meta-modellerine göre OHK tahmin başarımları bakımından incelenmesi  $(OHK_m - OHK_k) / OHK_k * 100$  şeklinde hesaplanmıştır. Burada  $OHK_m$  karşılaştırılan meta-modelin OHK değerini ve  $OHK_k$  ise KÜK meta-modelinin OHK değerini göstermektedir. Çizelge 5.26 ve 5.27'de problem türleri, girdi değişken sayısı, model kurarken kullanılan deney sayısı, model geçerliliğinde kullanılan deney sayısı, KÜK meta-modeli kesirli üs (p) ve OK, ÜK (doğrusal drift) ve ÜK (karesel drift) meta-modellerinin KÜK meta-modeline göre OHK oranlarının ne kadar yüksek olduğunu göstermektedir.

Çizelge 5.26'ya göre küçük deney sayısı ile yapılan geçerlilik incelemesinde iki değişkenli TF'lerin tümünde, Rosenbrock fonksiyonu dışındaki diğer üç değişkenli TF'lerin tamamında KÜK meta-modelinin daha iyi tahmin yapan bir meta-model olduğu görülmektedir.

Çizelge 5.27'ye göre büyük deney sayısı ile yapılan geçerlilik incelemesinde, iki değişkenli TF'lerde Adjiman ve Deckkers-Aarts hariç TF'lerin tamamında, üç değişkenli TF'lerde ise Michaelwicz fonksiyonunda ÜK (karesel drift) ve KÜK meta-modellerinin eşdeğer tahmin başarısına sahip olduğu, diğer TF'lerin tümünde ise KÜK meta-modelinin daha iyi tahmin yapan bir meta-model olduğu görülmektedir.

İki boyutlu **altı hörgüçlü deve sırtı**, **Styblinski–Tang**, **Zettl** ve **Shubert** fonksiyonları için bu tezde önerilen KÜK meta-modeli diğer kriging meta-modellerine göre çok daha iyi tahmin ürettiği görülmektedir. Üç boyutlu **Styblinski–Tang**, **Schwefel**, **Isigami** ve **Perm** fonksiyonları için de benzer durum gözlenmiştir. Yani karmaşık ve zor fonksiyonlar için elde edilen KÜK meta-modeli ile diğer kriging meta-modellerine göre çok daha iyi tahmin elde edileceği görülmektedir.

### **Genel Değerlendirme:**

Çizelge 5.28'de küçük veri seti ile ve Çizelge 5.29'da tüm veri seti ile yapılan geçerlilik incelemesinde iki ve üç değişkenli TF'ler için OK, ÜK (doğrusal drift) ve ÜK (karesel drift) meta-modellerinin KÜK meta-modeline göre OHK oranlarının ne kadar yüksek olduğunun genel bir değerlendirmesini göstermektedir.

Çizelge 5.28 KÜK meta-modeline göre diğer kriging modellerinin OHK'lardaki ortalama sapma oranı (1)

Problem	OK'a göre ortalama	ÜK'e göre (doğrusal drift) ortalama	ÜK'e göre (karesel drift) ortalama
İki değişkenli TF	23895	21708	1994
Üç değişkenli TF	1914	1382	702

Çizelge 5.29 KÜK meta-modeline göre diğer kriging modellerinin OHK'lardaki ortalama sapma oranı (2)

Problem	OK'a göre ortalama	ÜK'e göre (doğrusal drift) ortalama	ÜK'e göre (karesel drift) ortalama
İki değişkenli TF	38135	32135	2182
Üç değişkenli TF	1356	861	447

Bu tezde önerilen KÜK meta-modelinin küçük veri setiyle yapılan geçerlilik incelemesinde, OHK'lardaki tüm TF'ler için ortalama sapma oranı dikkate alındığında iki değişkenli TF'ler için en küçük % 1994, üç değişkenli TF'ler için en küçük % 702 ile daha iyi tahmin yapacak bir meta-model olduğu görülmektedir.

Bu tezde önerilen KÜK meta-modelinin büyük veri setiyle yapılan geçerlilik incelemesinde OHK'lardaki tüm TF'ler için ortalama sapma oranı dikkate alındığında iki değişkenli TF'ler için en küçük % 2182, üç değişkenli TF'ler için en küçük % 447 ile daha iyi tahmin yapacak bir meta-model olduğu görülmektedir.

Yukarıdaki değerlendirmeler sonucunda benzetim denemeleri için harcanan zaman ve maliyet dikkate alındığında bu tezde önerilen KÜK meta-modelinin özellikle iki ve üç değişkenli karmaşık test problemlerinde başarılı tahmin yapabilecek meta-modeller olduğu gösterilmiştir.

Bu sonuçlara dayanarak, KÜK meta-modellerinin karmaşık sistemlerin benzetim modelleri yerine meta-model olarak kullanılması önerilmektedir.



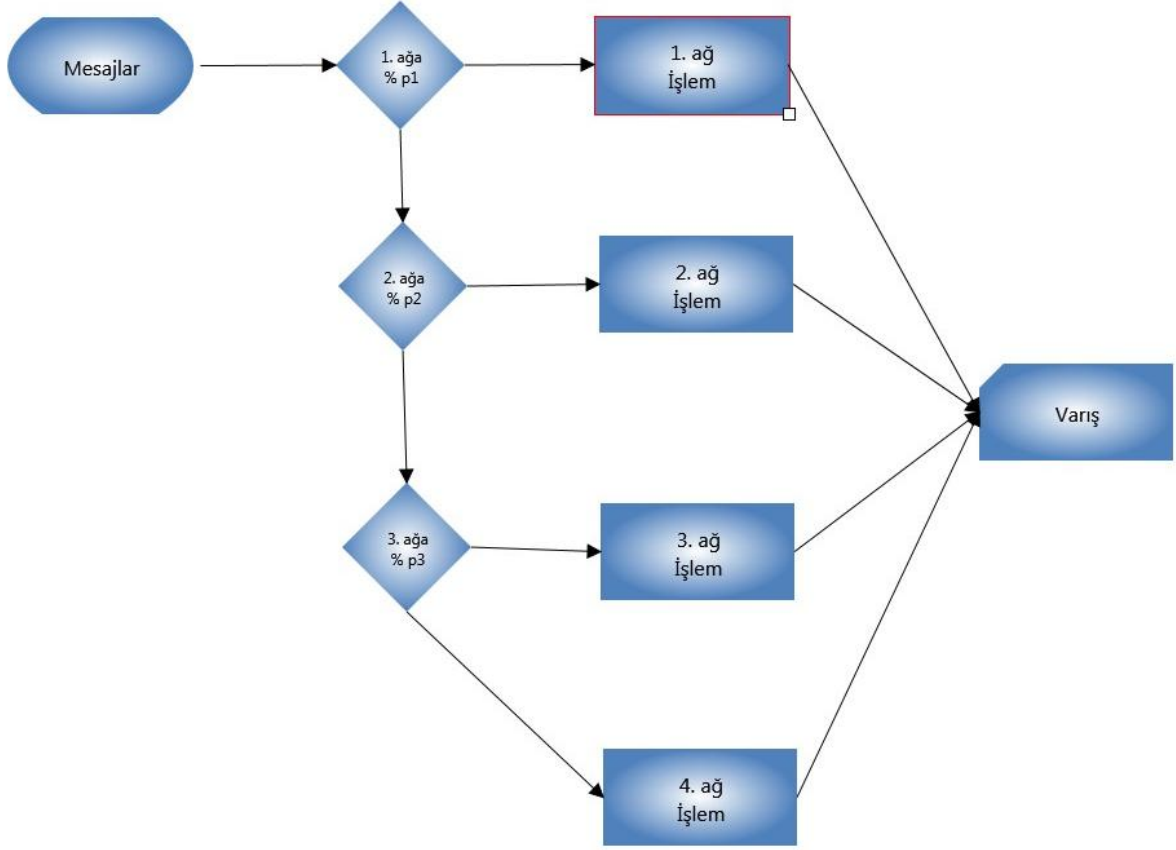
## 6. UYGULAMA: KESİRLİ ÜNİVERSAL KRİĞİN META-MODELİ İLE BENZETİM ENİYİLEMESİ

Tezin bu bölümünde bir iletişim ağının eniyilenmesi problemi ele alınmıştır. Rassal özellik taşıyan bu sistemin BE'si ile çözümünde KÜK meta-modelinin kullanılması bir uygulama olarak yer almaktadır.

### 6.1 Problemin Tanımı

Bir iletişim sisteminde toplam maliyeti en küçükleyecek şekilde rassal gelen mesajların bir ağa yönlendirilme olasılıklarının bulunması problemi ele alınmıştır. Bu problem Barton and Meckesheimer [27] tarafından tanımlanmış olup Şekil 6.1'de şematik gösterimi verilmektedir. Problemden, 3 ağa yönlendirilen 1000 rassal mesaj dikkate alınmıştır. Bu tezde, bu probleme bir ağ daha eklenerek toplam 4 ağa sahip bir iletişim sistemi olarak ele alınmıştır. Her ağdaki işlem süresi ve maliyeti farklıdır. Bir mesaj  $p_1$  olasılıkla 1. ağa,  $(1 - p_1)p_2$  olasılıkla 2. ağa,  $[1 - (1 - p_1)p_2]p_3$  olasılıkla 3. ağa ve  $[1 - [1 - (1 - p_1)p_2]p_3]$  olasılıkla 4. ağa gitmektedir. Mesajların varışlararası zaman dağılımı, ortalaması 1 zaman birimi olan üstel dağılıma uygundur. Herhangi bir mesajın,  $i$ . ağa göre işlem süresi, modu  $E(S_i) = i$ , alt ve üst sınır değerleri  $\pm 0,5$  olan üçgen dağılıma sahiptir. Sistem maliyeti, her bir mesajın işlem maliyeti ile sistemde geçirdiği süreye bağlı bekleme maliyetinin toplamından oluşmaktadır. Her bir mesajın işlem maliyeti  $a_1, a_2, a_3, a_4$  olup işlem gördüğü ağa bağlıdır ve  $i$  ağ numarası olmak kaydıyla  $a_i = \frac{1}{i}$  \$ değerini alır. Her mesajın sistemde geçirdiği süreye bağlı sabit bir birim zaman maliyeti vardır ve  $a = 0,005$  \$ değerini alır.

Problem, bu iletişim sisteminde rassal gelen mesajların işlem görme maliyetini enküçükleyen ağlara yönlendirilme olasılıklarının  $(p_1, p_2, p_3, p_4)$  bulunması olarak tanımlanmaktadır.



Şekil 6.1 Bir iletişim sisteminin gösterimi

Bu sistem için BE problemi matematiksel olarak (6.1) ve (6.2) numaralı eşitlikler ile verilmiştir.

$$0,1 \leq p_i \leq 0,91, i = 1, 2, 3 \quad (6.1)$$

kısıtları altında,

$$\text{enk } Z = \sum_j^4 \sum_{i=1}^{m_j} (a S_{ij}) + \sum_{i=1}^4 (a_j m_j) \quad (6.2)$$

Burada Z sistemin toplam maliyetini,  $S_{ij}$  i. mesajın j. ağda geçirdiği toplam süreyi ve  $m_j$  ise j. ağda işlem gören toplam mesaj sayısını göstermektedir.

$$m_1 = p_1 1000 \quad (6.3)$$

$$m_2 = p_2 (1000 - m_1) \quad (6.4)$$

$$m_3 = p_3 (1000 - m_1 - m_2) \quad (6.5)$$

$$m_4 = (1000 - m_1 - m_2 - m_3) \quad (6.6)$$

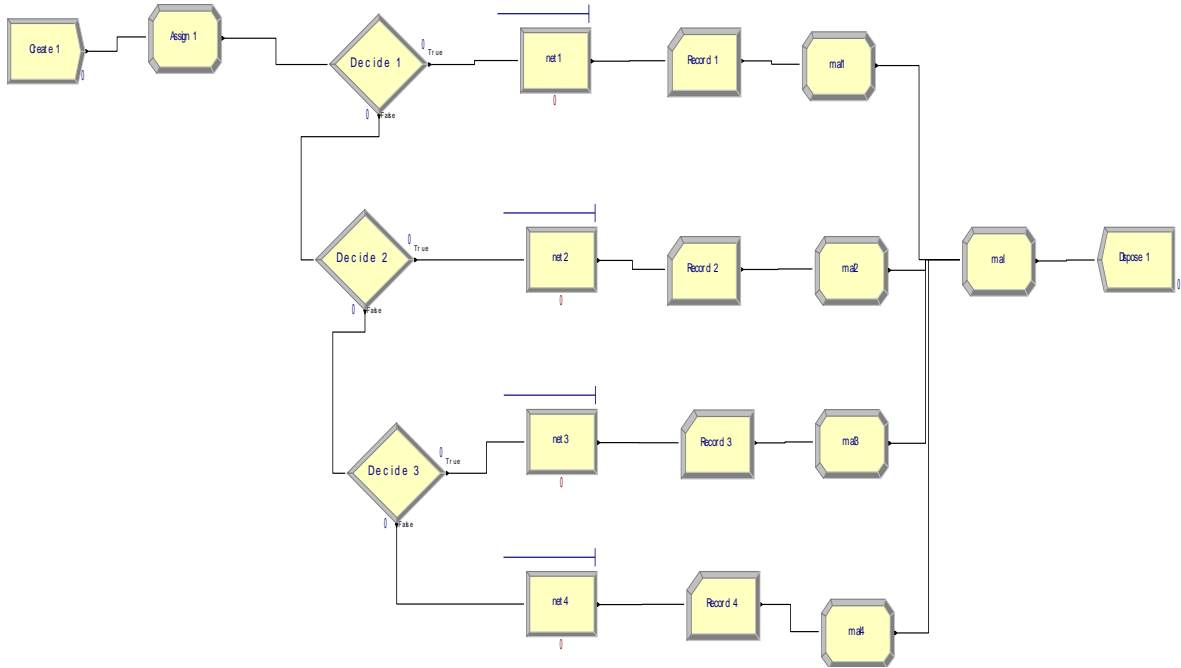
$$S_{ij} = S_j + qt_{ij}, \quad i = 1, \dots, m_j, \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (6.7)$$

$$S_j = \text{TRIA}(j - 0.5, j, j + 0.5), \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad (6.8)$$

(6.3), (6.4), (6.5), (6.6), (6.7) ve (6.8) numaralı eşitliklerde ağlara gönderilmesi beklenen mesaj sayıları ve bu mesajların işlem sürelerine ilişkin hesaplamalar verilmiştir. Burada  $qt_{ij}$  i. mesajın j. ağda toplam bekleme süresini göstermektedir.

## 6.2 Problemin Benzetim Modeli

Yukarıda tanımlanan sistem ARENA programı kullanılarak modellenmiş ve modelin geçerliliği için  $p_1 = 0,25$ ,  $p_2 = 0,33$ ,  $p_3 = 0,5$  girdi değişkenlerine göre çalıştırılmıştır. Buradan sonra girdi değişkenleri için  $x_1 = p_1$ ,  $x_2 = p_2$ ,  $x_3 = p_3$  notasyonları kullanılacaktır.



Şekil 6.2 Problemin ARENA programındaki benzetim modeli

## 6.3 Meta-model Geliştirme

Literatürde olasılıklı sistemler için sadece OK meta-modeli kullanılmıştır. Bu tezde OK ve önerilen KÜK meta-modellerinin başarımı yukarıda tanımlanan problem üzerinde incelenmiştir.

### 6.3.1 Deney Tasarımı ile Meta-model Veri Setinin Üretilmesi

Kriging meta-modelleri için tüm cevap yüzeyini temsil eden homojen dağılmış deneyler gereklidir. Bu nedenle alan doldurma tasarımları kullanılır. LHT en çok kullanılan yöntemdir. Kriging için deney tasarımı ayrıntılı olarak Bölüm 2.4.2'de açıklanmıştır.

LHT ile elde edilen 26 deney noktası için rassal sıralama Çizelge 6.1 ile verilmiştir.  $x_1, x_2, x_3$  sütunları girdi değişkenlerinin değerlerini,  $c_i$  sütunları  $i$ . tekrarlama için sistem maliyetini, Z sütunu ise on tekrardan elde edilen ortalama maliyet değerini göstermektedir. Girdi değişkenleri  $0,1 \leq x_i \leq 0,91$ ,  $i = 1, 2, 3$  arasında değer almaktadır.

Çizelge 6.1 Kriging meta-modellerinin kurulmasında kullanacak veriler.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$c_5$	$c_6$	$c_7$	$c_8$	$c_9$	$c_{10}$	Z
0,55	0,37	0,19	706,861	717,654	728,236	723,033	728,582	725,22	726,086	717,127	697,25	714,464	718,451
0,91	0,82	0,88	982,229	963,736	977,62	975,012	1013,11	989,143	1010,6	989,246	972,009	969,784	984,249
0,61	0,1	0,91	800,605	784,98	799,939	774,906	831,179	809,327	791,481	788,767	786,257	791,85	795,929
0,37	0,28	0,79	692,704	641,014	655,581	638,652	733,385	760,01	905,784	749,547	756,89	768,836	730,24
0,43	0,4	0,46	661,412	648,21	667,135	655,691	655,331	662,852	647,007	665,176	636,579	638,827	653,822
0,22	0,34	0,43	517,448	497,722	518,022	513,232	528,327	515,819	517,268	499,089	508,376	519,188	513,449
0,58	0,43	0,16	750,774	743,122	735,986	744,979	751,286	745,402	737,152	733,048	737,987	747,573	742,731
0,34	0,73	0,61	670,546	664,874	688,482	669,864	698,93	671,283	780,432	679,226	674,827	670,508	686,897
0,67	0,88	0,1	839,488	856,751	831,885	832,849	844,424	830,717	838,147	829,899	828,633	841,843	837,464
0,46	0,61	0,82	703,034	717,082	707,697	702,972	707,032	704,621	709,936	702,428	688,976	698,339	704,212
0,16	0,7	0,49	924,039	763,828	855,686	788,633	946,613	802,816	1016,88	897,34	735,524	908,597	863,995
0,4	0,55	0,7	665,066	658,934	663,297	647,556	677,551	665,32	658,241	662,462	658,378	657,21	661,402
0,88	0,46	0,55	948,687	938,989	942,36	951,204	995,376	954,975	956,349	949,92	934,485	928,069	950,041
0,64	0,85	0,73	819,271	842,439	816,973	823,21	821,217	820,321	826,453	821,177	805,585	813,116	820,976
0,19	0,58	0,34	580,874	549,43	535,464	563,755	548,852	545,311	616,653	559,032	544,25	552,561	559,618
0,73	0,19	0,64	830,732	840,181	837,25	831,918	832,361	831,192	829,896	833,179	833,054	837,878	833,764
0,76	0,76	0,31	872,136	873,786	876,103	886,253	889,883	879,049	887,727	881,752	865,801	874,153	878,664
0,79	0,16	0,58	874,539	875,796	870,496	868,82	871,495	869,045	882,379	869,369	863,909	873,308	871,916
0,52	0,79	0,13	752,597	759,111	743,849	758,092	749,836	755,011	755,83	747,296	724,673	733,168	747,946
0,85	0,49	0,85	925,051	920,108	925,574	922,98	940,364	935,902	945,464	934,469	911,217	923,795	928,492
0,13	0,31	0,4	452,195	452,317	447,169	456,5	463,963	446,866	448,253	448,315	441,596	457,238	451,441
0,82	0,13	0,52	887,631	885,521	891,027	904,692	893,75	900,542	898,523	885,872	891,428	892,026	893,101
0,7	0,22	0,76	814,098	811,64	821,39	812,875	810,671	815,247	831,049	823,474	813,798	821,752	817,599
0,31	0,52	0,22	599,278	587,909	604,053	579,438	610,701	598,922	594,452	584,699	580,416	582,164	592,203
0,49	0,67	0,28	711,936	715,295	712,759	719,389	738,909	723,824	724,337	699,374	712,099	710,525	716,845
0,1	0,64	0,37	808,392	668,527	794,604	658,198	787,918	768,831	930,894	638,916	645,731	658,937	736,095

Kriging meta-modelleri bir konum için tek bir gözlem değeri (maliyet) ile hesaplandığı Z değeri kullanılmıştır.

### 6.3.2 Varyogram / Korelogram Modelinin Belirlenmesi

Verilere varyogram/korelogram incelemesi yapılarak (6.9) numaralı eşitlik ile verilen Gausyen korelogram modelinin uygun olduğu sonucuna ulaşılır.

$$r(h) = \exp \left( - \left( h / 1,428571 \right)^2 \right) \quad (6.9)$$

### 6.3.3 Kesirli Üiversal Kriging Meta-modelinin Geçerliliği

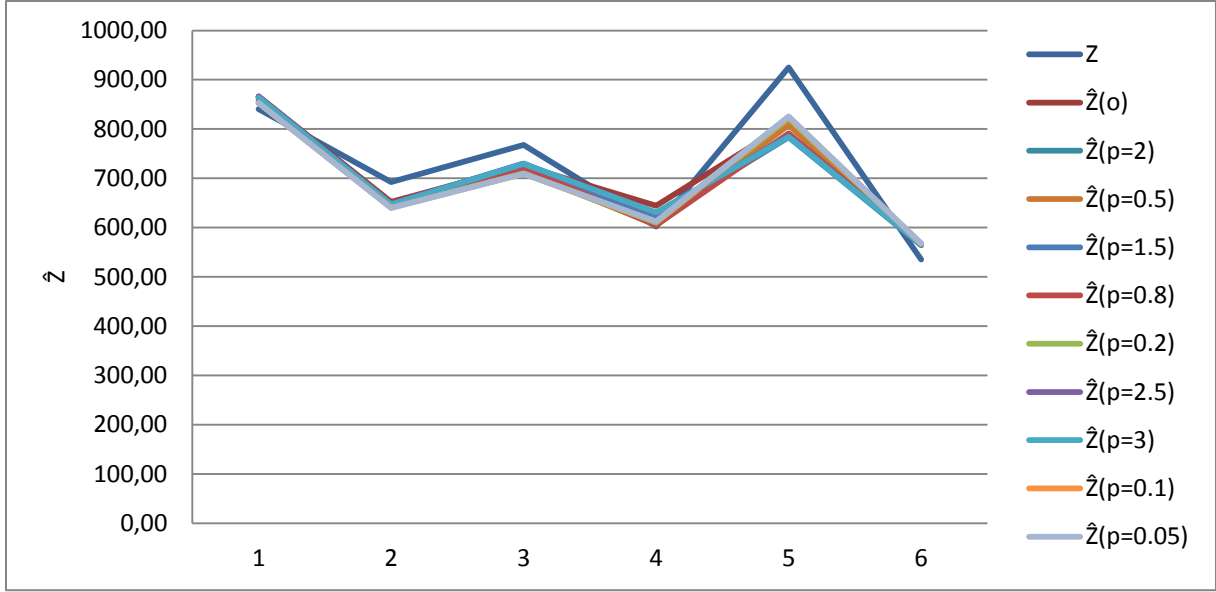
Kriging meta-modelleri en iyi yansız doğrusal tahmin edici olduğundan geçerliliği için model kurarken kullanılan verilerden bağımsız altı deneyden oluşan bir veri seti LHT ile elde edilmiştir.

Çizelge 6.2 OK meta-modelinin geçerlilik için tahmin değerleri.

Deney Sırası	x			Z	OK
	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	x <sub>3</sub>		Ẑ (o)
1	0,71	0,5	0,73	840,70	866,25
2	0,44	0,63	0,63	692,64	652,03
3	0,55	0,79	0,39	767,99	725,67
4	0,41	0,15	0,28	602,20	644,20
5	0,84	0,69	0,13	925,20	811,86
6	0,25	0,33	0,5	535,06	564,82

Çizelge 6.3 Önerilen KÜK meta-modellerinin geçerlilik için tahmin değerleri.

Deney Sırası	KÜK								
	Ẑ (p=0,05)	Ẑ (p=0,1)	Ẑ (p=0,2)	Ẑ (p=0,5)	Ẑ (p=0,8)	Ẑ (p=1,5)	Ẑ (p=2)	Ẑ (p=2,5)	Ẑ (p=3)
1	852,912	853,057	853,505	856,397	860,956	865,296	865,288	864,996	864,161
2	639,685	640,109	641,006	643,943	646,429	647,631	647,613	647,571	647,149
3	708,974	709,087	709,62	714,064	721,819	730,406	729,572	728,945	729,174
4	612,627	611,855	610,18	605,233	604,765	618,708	626,045	629,461	630,74
5	825,451	824,428	821,706	808,068	791,253	783,075	785,945	785,705	783,786
6	567,463	567,392	567,188	566,166	564,928	564,7	565,308	565,613	565,76



Şekil 6.3 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging meta-modellerinin tahmin değerleri

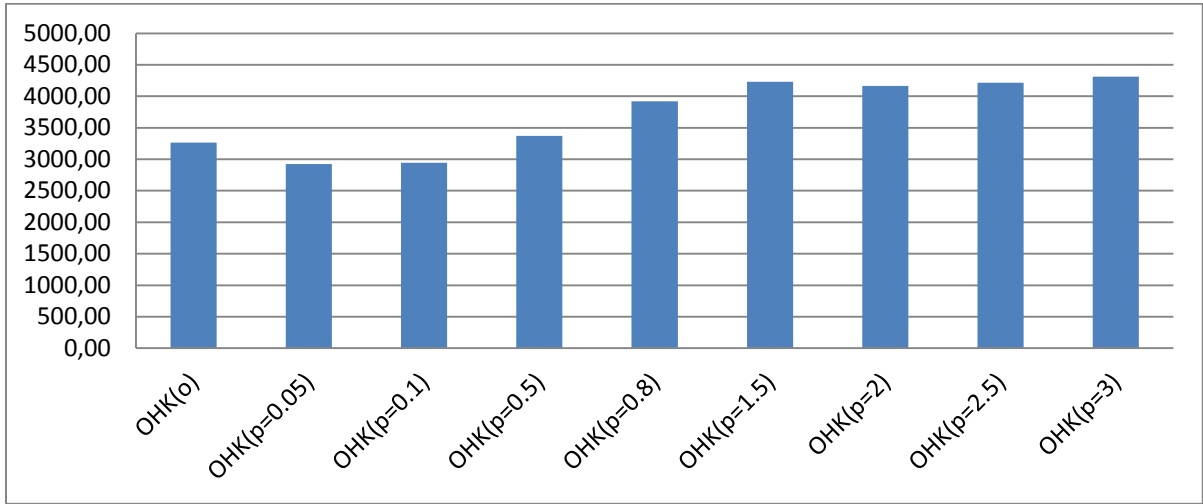
Model geçelilik veri seti için elde edilen kriging meta-model tahminleri Şekil 6.3'de gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde görsel olarak bütün meta-modellerin birbirine yakın tahmin verdiği görülmektedir. Ancak uygun meta-model seçimi bölüm 6.3.4'de verilen başarımlar ölçütlerine göre yapılır.

### 6.3.4 Uygun Kriging Meta-modelinin Seçilmesi

Meta-model geçerliliğinde kullanılan veri seti için meta-model başarımları Çizelge 6.4'de verilmiştir.

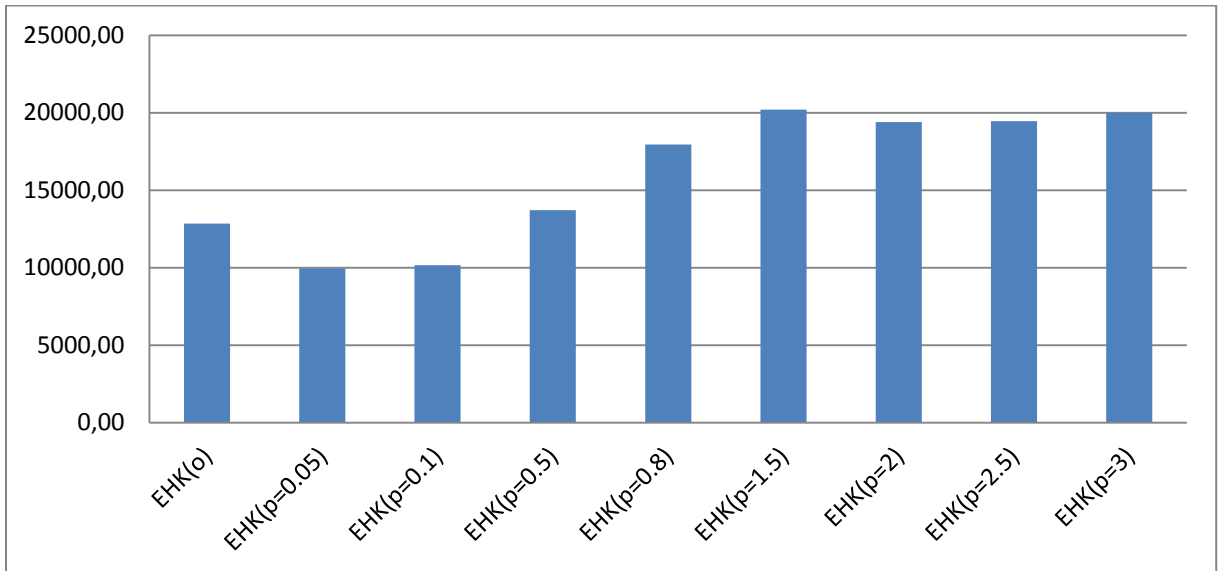
Çizelge 6.4 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging meta-modellerinin başarımları

Model	Drift fonksiyonu		OHK	EHK
OK	sabit		3264,54	12845,59
KÜK	kesirli üslü	p=0,05	<b>2923,96</b>	<b>9949,5</b>
		p=0,1	2945,72	10154,7
		p=0,2	3007,16	10710,7
		p=0,5	3370,24	13719,5
		p=0,8	3919,48	17941,4
		p=1,5	4232,12	20199,1
		p=2	4163,71	19391,5
		p=2,5	4213,39	19458,4
		p=3	4313,38	19997,5



Şekil 6.4 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging modellerininin başarımı (OHK)

OHK dikkate alınarak Çizelge 6.4 ve Şekil 6.4 incelendiğinde  $p=0,05$  dereceden KÜK meta-modelinin en küçük değere sahip olduğu görülmektedir.



Şekil 6.5 İletişim ağı mesaj yönlendirme problemi için kriging modellerininin başarımı (EHK)

EHK dikkate alınarak Çizelge 6.4 ve Şekil 6.5 incelendiğinde  $p=0,05$  dereceden KÜK meta-modelinin en küçük değere sahip olduğu görülmektedir.

$(OHK_m - OHK_k) / OHK_k * 100$  ölçütüne göre  $p=0,05$  dereceden KÜK meta-modeli OK meta-modeline göre % 11,65 daha iyi tahmin yaptığı görülmektedir.

#### 6.4 Benzetim Eniyilemesi

OHK dikkate alındığında çalışmada önerdiğimiz KÜK meta-modeli için drift fonksiyonu olarak  $\mu(x) = \sum_{i=1}^3 \beta_i x_i^{0,05}$  kullanılarak eniyileme algoritması çalıştırılır.

Burada  $x_1, x_2, x_3$  girdi değişkenleri 0,01 hassaslıkta ele alındığında her bir değişken 81 farklı değer alabilmektedir. Buda girdi değişkenlerinin toplam 531 441 adet kombinasyonu eder. Tüm girdi değişkenleri kombinasyonu için bir arama algoritması kullanılarak, seçilen  $p=0,05$ . dereceden KÜK meta-modeli ile maliyet (Z) tahminlerini yaparsak,

$$x_1=0,1; x_2=0,26; x_3=0,17 \text{ için } Z^*=322,548$$

sonucu elde edilir.

Bu tezde önerdiğimiz  $p=0,05$ . dereceden KÜK meta-modelinin en iyi sonuçları verdiği görülmektedir.



## 7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Benzetim modelleri, maliyeti veya diğer kısıtlamalar nedeniyle gerçek sistemin deney yapmaya uygun olmadığı durumlarda, yeni kurulmakta olan sistemin tasarım aşamasında, büyük boyutlu karmaşık sistemlerde, rassallık içeren sistemlerde veya denge durumu dışında sistemlerin geçici durumlarının incelenmesi gerektiğinde sistemin çıktılarının, girdilerine karşı nasıl tepki vereceğinin incelenmesinde bir karar verme aracı olarak kullanılır.

Meta-modeller ise duyarlılık analizi, girdilerin değişimine karşı çıktıların değişiminin gözlenmesi ve eniyileme gibi birçok amaç için benzetim modeli ile veri üretmenin yüksek maliyetli olduğu durumlarda benzetim modelleri yerine kullanılır.

Bu tez çalışmasında, benzetim modelinin yerine kullanılacak KÜK meta-modeli ilk kez önerilmiştir.

KÜK meta-modeli, girdi değişkenleri ile çıktı değişkenleri arasındaki ilişkinin her zaman doğrusal veya karesel drift fonksiyonları ile tanımlanamayabileceği, daha yüksek dereceli drift fonksiyonlarına ihtiyaç duyulabileceği durumlarda kullanılmak üzere önerilmiş bir ÜK meta-modelidir.

Bu çalışmada, önerilen KÜK meta-modelinin, OK, doğrusal ve karesel drift fonksiyonlu ÜK meta-modelleri ile birlikte iki ve üç boyutlu (girdi değişkenli) TF üzerinde geçerliliği matematiksel ve istatistiksel incelemeler ile araştırılmıştır.

Küçük deney sayısı ile yapılan geçerlilik incelemesinde iki değişkenli TF'lerin tümünde, Rosenbrock fonksiyonu dışındaki diğer üç değişkenli TF'lerin tamamında KÜK meta-modelinin daha iyi tahmin yapan bir meta-model olduğu gösterilmiştir.

Büyük deney sayısı ile yapılan geçerlilik incelemesinde ise iki değişkenli TF'lerde Adjiman ve Deckkers-Aarts hariç diğer TF'lerde, üç değişkenli TF'lerde ise Michaelwicz fonksiyonunda ÜK (karesel drift) ve KÜK meta-modellerinin eşdeğer tahmin başarısına sahip olduğu, diğer TF'lerin tümünde ise KÜK meta-modelinin daha iyi tahmin yapan bir meta-model olduğu gösterilmiştir.

Yapılan değerlendirmeler sonucunda benzetim denemeleri için harcanan zaman ve maliyet dikkate alındığında bu tezde önerilen KÜK meta-modelinin özellikle iki ve üç

değişkenli karmaşık test problemlerinde başarılı tahmin yapabilecek meta-modeller olduğu gösterilmiştir.

Bu sonuçlara dayanarak, KÜK meta-modelleri karmaşık sistemlerin benzetim modelleri yerine meta-model olarak kullanılması önerilmiştir. Bu tezin ana konusunu içeren benzetim modelinden veri üretmenin zaman ve maliyet açısından çok pahalı olduğu durumlar dikkate alındığında, az sayıda veriye dayanan küçük veri setiyle tahmin başarısı yüksek meta-modeller önermek olduğu için bu analizler sonucu iki değişkenli ve üç değişkenli karmaşık problemler için KÜK meta-modeli yüksek başarı ile kullanılabilir bir meta-model olarak önerilmiştir.

Ayrıca, olasılıklı BE'si için bu tezde önerilen KÜK meta-modeli "bir iletişim ağında rassal gelen mesajların işlem görme maliyetini en küçükleyecek yönlendirilme olasılıklarının bulunması problemine" uygulanmıştır. KÜK meta-modeli bu rassal problemde de OK meta-modeline göre daha iyi tahmin üretmiştir.

Bu çalışmada, her ne kadar önerilen KÜK meta-modelinin geçerliliği, iki ve üç boyutlu (girdi değişkenli) TF üzerinde matematiksel ve istatistiksel incelemeler ile araştırılmış ise de üçten fazla boyutlu problemlerde de kullanılabilirliği üzerinde bir kısıtlama bulunmamaktadır.

KÜK meta-modeli gerek belirli gerekse rassal benzetim modellerinin eniyilemesinde veya duyarlılık analizinde daha kaliteli çözümler üretmemize olanak verecektir.

Kriging meta-modellerinin, bütün doğrusal tahmin ediciler arasında en küçük ortalama hata kareli yansız tahmin ediciler olduğu ve regresyon meta-modellerine göre daha doğru tahminler ürettiği literatürde birçok çalışmada gösterilmiştir ([20]; [11]; [21]; [31]; [35]). Dolayısı ile bu tezde diğer meta-model yöntemleri üzerinde durulmamış, önerilen KÜK meta-modelinin literatürde bilinen kriging meta-modelleri ile karşılaştırması yapılmıştır.

Kriging meta-modellerinin benzetim alanındaki uygulamalarının çeşitlenmesi bu alana teorik olarak da katkıları artıracaktır. Girdi değişken sayısının çok fazla olduğu durumlarda rassal değişkenin konumsal ilişkisini gösteren uygun varyogram (veya korelogram) modelinin belirlenmesi gibi konular da hala üzerinde durulmaya değer konulardır.

Girdi değişken sayısının üçten büyük olduğu problemlerde KÜK meta-modelinin başarımının sınanması, mühendislik alanındaki eniyileme problemlerine uygulanması ilerde çalışılabilecek konulardır. Ayrıca kriging meta-modelleri kurma ve geçerleme çalışmalarını gerçekleştirecek bir paket program geliştirme çalışmaları da gelecekte yapılabilecek diğer çalışmalardır.

## KAYNAKLAR LİSTESİ

- [1] KELTON, W. David, Simulation with ARENA, 2 th ed. Sturrock, McGraw-Hill International Edition, 2002.
- [2] ÖREN, Tuncer, The many facets of simulation through a collection of about 100 Definitions, SCS M&S Magazine, no.2, 2011.
- [3] LAW, Awerill M., Simulation, modeling and analysis, 4th ed., McGraw-Hill International Edition, 2007.
- [4] EVANS, J. R. and OLSON, D.L., Introduction to simulationand risk analysis, 2nd ed., Prentice Hall, 2002.
- [5] AZADIVAR, Farhad, A tutorial on simulation optimization, Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference, 1992.
- [6] AZADIVAR, Farhad, Simulation optimization methodologies, Proceedings of the 1999 Winter Simulation Conference, 1999.
- [7] APRIL, J., GLOVER, F., KELLY, J. and LAGUNA, M., Simulation/optimization using real-world applications, Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference, 2001.
- [8] WINSTON Wayne L., Operations research applications and algorithms, 4th ed, Brooks/Cole, of Thomson Learning, Inc., 2004.
- [9] KLEIJNEN, Jack P.C., Regression metamodels for generalizing simulation results, IEEE Tranactions on systems, man and cybernetics, vol.SMC-9, No.2.,1979.
- [10] BARTON, Russel R., Metamodels for simulation input-output relation, Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference,1992.
- [11] SIMPSON, T., PEPLINSKI, J., KOCH, P. and ALLEN, J., Metamodels for computer-based engineering design: survey and recommendations, EWC vol.17 pp.129, 2001.
- [12] KLEIJNEN, Jack P.C., Kriging metamodeling in simulation: a review, European Journal of Operational Research, vol.192, pp. 707–716, 2009.
- [13] ZAKERIFAR, M., BILES, W.E. and EVANS, G. W., Kriging metamodeling in multiple objective simulation optimization, Tilburg University, Netherlands, 2011.
- [14] FU, Michael C, Optimization for simulation: theory vs. practice, INFORMS Journal on Computing Vol.14, No. 3, pp.192–215, Summer 2002.
- [15] FU, Michael C, Optimization via simulation: a review, Annals of Operations Research, vol.53, pp.199-248, 1994.
- [16] CARSON, Y. and MARIA, A., Simulation optimization: methods and applications, Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference, 1997.

- [17] ANDRADOTTIR, Sigrun, A review of simulation optimization techniques, Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, 1998.
- [18] BARTON, Russel R., Simulation metamodels, Proceedings of the 1998 Winter Simulation Conference, 1998.
- [19] BARTON, Russel R., Simulation optimization using metamodels, Proceedings of the 2009 Winter Simulation Conference, 2009.
- [20] SACKS, J., WELCH, W.J., MITCHELL, T.J. and WYNN, H.P, Design and analysis of computer experiments, Statistical Science, vol.4, no. 4, pp. 409-435, 1989.
- [21] VAN BEERS, W. and KLEIJNEN, J.P.C., Kriging for Interpolation in random simulation, Journal of the Operational Research Society, no. 54, pp. 255-262, 2003.
- [22] GLYNN, Peter W., Optimization of stochastic systems via simulation, Technical Report No. 43, Department of Operations Research, Stanford University, California, August 1989.
- [23] L'ECUYER, P., GIROUX, N. and Glynn, P.W., Stochastic optimization by simulation: numerical experiments with the M/M/1 queue in steady-state, Management Science, Vol.40, No.10, pp.1245-1261, Informs, 1994.
- [24] SWISHER, J.R., HYDEN, P.D., JACOBSON, S.H. and SCHRUBEN L. W., A survey of simulation optimization techniques and procedures, Proceedings of the 2000 Winter Simulation Conference, 2000.
- [25] FU, Michael C, Simulation optimization, Proceedings of the 2001 Winter Simulation Conference, 2001.
- [26] FU, M.C., GLOVER, F.W. and APRIL, J., Simulation optimization: a review, New Developments, and Applications", Proceedings of the 2005 Winter Simulation Conference, 2005.
- [27] BARTON, R.R. and MECKESHEIMER, M., Metamodel-based simulation optimization in simulation, Handbooks in Operations Research and Management Science vol. 13. Amsterdam: Elsevier B.V., 2006.
- [28] ANGUN, E. and KLEIJNEN, J.P.C., 2005, An asymptotic test of optimality conditions in multi response simulation-based optimization, working paper, 2005.
- [29] ZAKERIFAR, M., BILES, W.E., EKREN, B.Y., EVANS, G.W. and HERAGU, S.S., simulation optimization via metamodeling approach, Encyclopedia of Business Analytics and Optimization , IGI Global, 2014.
- [30] CHEN V.C.P., TSUI, K.L., BARTON, R.R. and ALLEN, J.K., A review of design and modeling in computer experiments, Handbook of Statistics, vol.22 pp.231–261, Elsevier, 2003.

- [31] MARTIN, J.D., and SIMPSON, T., On the use of kriging models to approximate deterministic computer models, ASME 2004 Conference, 2004.
- [32] CURRIN, C., MITCHELL, T.J., MORRIS, M.D. and YLVISAKER, D., Bayesian prediction of deterministic functions, with applications to the design and analysis of computer experiments, Journal of the American Statistical Association, Vol. 86, No. 416, pp. 953-963,1991.
- [33] SIMPSON, Timoty, Comparison of response surface and kriging models in the multidisciplinary design of an aerospike nozzle, ICASE Report No. 98-16, NASA/CR-1998-206935, 1998.
- [34] BILES, W.E., KLEIJNEN, J.P.C., VAN BEERS, W.C. and VAN NIEUWENHUYSE, M.I. Kriging metamodeling in constrained simulation optimization: an explorative study, Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference, 2007.
- [35] VAN BEERS, W. and KLEIJNEN, J.P.C., Kriging Interpolation In Simulation: A Survey, Technical report, Department of Information Management, Tilburg University, Netherlands, 2004.
- [36] ANKENMAN, B., NELSON B.L. and STAUM, J., Stochastic kriging for simulation metamodeling, Operations Research, Vol.58, No. 2, pp.371–382, 2010.
- [37] KLEIJNEN, Jack P.C., An overview of the design and analysis of simulation experiments for sensitivity analysis, European Journal of Operational Research, 2004.
- [38] VAN NIEUWENHUYSE I., Leuven, K.U., Kleijnen, J.P.C. and Van Beers, W., Constrained optimization in simulation: a novel approach, Technical report, Tilburg University, Netherlands, 2008.
- [39] BASHYAM, S. and FU, M.C., Optimization of (s, S) inventory systems with random lead times and a service level constraint. Management Science, 44, pp. 243-256, 1998.
- [40] JIN, R., CHEN, W. and SUDJIANTO, A., On sequential sampling for global metamodeling in engineering design, Proceedings of DETC'02, ASME 2002 Conference, 2002.
- [41] GIUNTA, A. and WATSON, L.T., "A comparison of approximation modeling technique: polynomial versus interpolating models, AIAA-98-4758, AIAA, 1998.
- [42] SIMPSON, T. and MISTREE, F., Kriging models for global approximation in simulation-based multidisciplinary design optimization, AIAA Journal Vol. 39, No. 12, December 2001.
- [43] KLEIJNEN, Jack P.C., Kriging metamodeling in simulation: a review, Technical report, Department of Information Management, Tilburg University, Netherlands, 2007.

- [44] MC KAY, M G.D., Beckman, R.J. and Conover, W.J., A comparison of three methods for selecting values of input variables in the analysis of output from a computer code, *Technometrics*, 21, pp.239– 245, 1979.
- [45] SANTNER, T.J., WILLIAMS, B.J. and NOTZ, W.I., *The design and analysis of computer experiments*, NY: Springer-Verlag, 2003.
- [46] FANG, K.T., LI, R. and SUDJANTO, A., *Design and modeling for computer experiments*, Taylor & Francis Group: Boca Raton, 2006.
- [47] JOSEPH, V.R, and HUNG, Y., Orthogonal-maximin latin hypercube designs. *Statistica Sinica*, vol.18, pp.171- 186, 2008.
- [48] OWEN, A. B., Orthogonal arrays for computer experiments, integration and visualization, *Statist. Sinica*, no.2, pp.439-452, 1992.
- [49] TANG, Boxin, Orthogonal array-based Latin hypercubes. *J. Am. Statist. Assoc.* 88, 1392-1397, 1993.
- [50] OWEN, A. B., Controlling correlation in Latin hypercube samples. *Journal of the American Statistical Association*, no.89, pp.1517-1522, 1994.
- [51] TANG, Boxin, Selecting Latin hypercubes using correlation criteria. *Statist. Sinica* 8, 965-977, 1998.
- [52] YE, K.Q., Orthogonal column Latin hypercubes and their application in computer experiments, *Journal of the American Statistical Association*, vol.93, pp.1430-1439,1998.
- [53] CRESSIE, Noel A.C., Geostatistics, *The American Statistician*, vol.43, no.4, pp.197-202, 1989.
- [54] CRESSIE, Noel A.C., *Statistics for spatial data*, New York: A Wiley-Interscience publication, 1993.
- [55] CRESSIE, N.A.C. and HAWKINS, D.M., Robust estimation of the variogram: I, *Mathematical Geology*, vol.12, no.2, pp.115-125, 1980.
- [56] GENTON, Marc G., Highly robust variogram estimation, *Mathematical Geology*, vol. 30, No. 2, 1998.
- [57] MYERS, Donald E., On variogram estimation. *The frontiers of statistical scientific theory & industrial applications*, pp.261-281, 1991.
- [58] MATHERON, George, *Principles of Geostatistics*. *Economic Geology*, vol.58, pp.1246- 1266,1963.
- [59] MITCHELL, T.J. and MORRIS, M.D., Bayesian design and analysis of computer experiments: two examples, *Statistica Sinica*, vol. 2, pp. 359–379, 1992.

- [60] CRESSIE, Noel A.C., The origins of kriging, *Mathematical Geology*, vol.22, pp.239–252, 1990.
- [61] JOURNEL, Andre G., *Fundamentals of geostatistics in five lessons*, vol.8, 1989.
- [62] SIMPSON, T., PEPLINSKI, J., KOCH, P. and ALLEN, J., On the use of statistics in design and the implications for deterministic computer experiments, *Proceedings of DETC'97, ASME 1997Conference*, 1997.
- [63] JOURNEL, A.G. and ROSSI, M.E., When do we need a trend model?, *Technical Report No:115, Stanford University*, 1988.
- [64] DEUTSCH, C.V. and JOURNEL, A.G., *GSLIB: Geostatistical software library and user's guide*, 2nd ed., Oxford Univ. Press, New York, 1998.
- [65] ROTH, Chris, Is lognormal kriging suitable for local estimation?, *Mathematical Geology*, vol. 30, No.8, 1998.
- [66] JOURNEL, A.G. and HUIJBREGTS, C.J., *Mining geostatistics*. London: Academic Press, 1978.
- [67] DOWD, P. A., Lognormal kriging—the general case: *Math. Geology*, vol.14, no.5, pp.474-500, 1982.
- [68] CHRISTENSEN, Ronald, *Log-linear models*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [69] JAMIL, M. and YANG, X.S., A literature survey of benchmark functions for global optimization problems, *Int. Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, Vol.4, No.2, pp.150–194, 2013.
- [70] SHUBERT, Bruno O., A sequential method seeking the global maximum of a function, *SIAM J. Numer. Anal.*, No.9, pp.379–388, 1972.
- [71] ISHIGAMI, T. and HOMMA, T., An importance quantification technique in uncertainty analysis for computer models, In *Uncertainty Modeling and Analysis, Proceedings.*, pp.398-403, IEEE, 1990.